ORSAY
Série A,
N° d'ordre :

203

THÈSES

PRESENTEES

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR

PAR

Michel CLERGET

1ère THÈSE :

SYSTEMES LINÉAIRES POSITIFS NON STATIONNAIRES

2ème THÈSE :

PROPOSITIONS DONNÉES

Soutenues le 20 décembre 1973 devant la Commission d'examen :

MM.	PICINBONO	Président
	BLAQUIERE	Examinateurs
	FAURRE	Examinateurs

ORSAY
Série A,
N° d'ordre :

203

THÈSES

PRESENTEES

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR

PAR

Michel CLERGET

1ère THÈSE :

SYSTEMES LINÉAIRES POSITIFS NON STATIONNAIRES

2ème THÈSE :

PROPOSITIONS DONNÉES

Soutenues le 20 décembre 1973 devant la Commission d'examen :

MM. PICINBONO		Président
BLAQUIERE	}	Examinateurs
FAURRE	}	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Remerciements

Ce travail a été préparé à l'Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique (IRIA-LABORIA).

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur PICINBONO, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury d'examen.

J'ai reçu de Monsieur P.FAURRE, Directeur Scientifique à l'IRIA, une aide constante et des conseils précieux.Qu'il trouve ici l'expression de ma plus vive gratitude.

Je remercie beaucoup Monsieur le Professeur BLAQUIERE d'avoir bien voulu faire partie du Jury.

Merci enfin à Madame BARNY qui s'est chargé de dactylographier le manuscrit, ainsi qu'à tous mes camarades de l'IRIA, en particulier MM. ATTASI, GERMAIN,KLEIN,LEVIEUX, pour leur aide.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548017_0025

Sommaire

Ce travail concerne une classe de fonctions (désignons les par $\Lambda(.,.)$) utilisées dans l'étude des modèles linéaires de processus. Plus précisément, ces fonctions $\Lambda(.,.)$ représentent une réponse impulsionnelle étendue si le processus est déterministe et une covariance s'il est stochastique.

On sait depuis les travaux d'ANDERSON, FAURRE, KALMAN, POPOV, WILLEMS, YACOUBOVITCH et d'autres que la notion de positivité attachée à ce type de fonctions conduit à des résultats très intéressants dans divers domaines. A la base de ces résultats, le "lemme positif réel" est le critère algébrique qui donne une condition nécessaire et suffisante de positivité. Or, les différentes démonstrations de ce lemme et les développements qui en découlent concernaient jusqu'ici les seuls processus stationnaires. Il était intéressant de s'affranchir de cette hypothèse de stationnarité.

Après les rappels des chapitres 1 et 2, le chapitre 3 est donc consacré à un lemme positif réel "non-stationnaire". Il introduit un ensemble de "solutions" étudié au chapitre 4. Le chapitre 5 est relatif à deux solutions extrémales spécialement utiles pour les applications. Quelques unes de ces applications sont présentées aux chapitres 6 et 7. Enfin il fallait, une fois donné un processus, disposer d'un algorithme factorisant la fonction $\Lambda(.,.)$ associée sous une forme permettant d'appliquer le lemme positif réel ; un tel algorithme est présenté au chapitre 8, qui donne par ailleurs diverses applications numériques.

Notations

1) Pour toute fonction matricielle $F(.)$, on notera :

- $F(t)$ ou F_t la valeur à l'instant t de cette fonction
- $F'(t)$ la transposée de $F(t)$ et $F'(.)$ la fonction associée
- $\bar{F}(t)$ la valeur à l'instant $-t$: $\bar{F}(t) = F(-t)$.
- $rg\ [F_t]$ le rang de F_t.
- $Ker\ [F_t]$ le noyau de F_t.

2) $F \geq G$ (resp. $F > G$) désigne la relation d'ordre partiel sur un ensemble de matrices carrées symétriques :

$$F \geq G \text{ (resp. } F > G) \Leftrightarrow F-G \geq 0 \text{ (resp. } F - G > 0)$$

3) Nous dirons qu'un ensemble $\mathcal{P}$ de matrices P est positif (et nous noterons $\mathcal{P} > o$) si $\mathcal{P}$ est constitué de matrices définies positives.

4) Enfin $E\{x\}$ désigne l'espérance mathématique du vecteur aléatoire x.

P L A N

			Page
Chapitre 1	:	Réalisations de systèmes dynamiques linéaires Rappels :	2
Chapitre 2	:	Réalisations markoviennes - Rappels :	10
Chapitre 3	:	Lemme positif réel pour les systèmes linéaires non stationnaires :	15
Chapitre 4	:	Etude de l'ensemble $\mathcal{P}(.)$	25
Chapitre 5	:	Calcul de $P^*(.)$ et $P_*(.)$:	33
Chapitre 6	:	Applications du lemme positif réel à l'étude des systèmes dissipatifs :	39
Chapitre 7	:	Applications du lemme positif réel aux problèmes de filtrage :	44
Chapitre 8	:	Calcul d'une représentation - Résultats :	49
Complément sur le cas discret :			60
Annexes et bibliographie :			62

Chapitre I

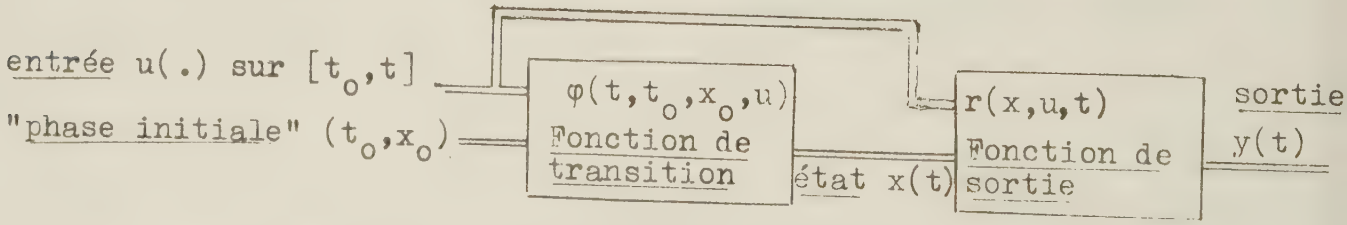
Réalisations de systèmes dynamiques linéaires - Rappels

1. Systèmes dynamiques - Notions de base.

On qualifie de système dynamique tout ce qui génère une grandeur* unique, la sortie (ou observation), à partir d'une autre, l'entrée (ou commande), étant entendu que seules les entrées passées peuvent influencer les sorties futures (**causalité**).

La donnée d'un opérateur entrée/sortie (causal) décrit donc un système dynamique. Ce mode de description dit "externe" nécessite de connaître toute l'histoire passée des entrées pour déterminer la sortie.

Pour cette raison, on lui préfère souvent une description interne (ou par modèle d'état) obtenue en paramétrisant les relations d'entrée/sortie. On introduit ainsi un intermédiaire - l'état - qui représente la "mémoire" du système. Les entrées sont alors considérées comme des moyens d'action sur l'état (par le biais de la fonction de transition φ), la sortie étant liée à l'état par un opérateur sans mémoire (fonction de sortie **r**) suivant le diagramme fonctionnel suivant :



Les fonctions φ et r doivent satisfaire certaines conditions de cohérence et de régularité. On trouvera en annexe 1.A. une définition plus précise où ces conditions sont énoncées.

---

* Les grandeurs considérées dans ce chapitre sont déterministes et vectorielles.

Une fois établi un modèle d'état de système dynamique, il importe de préciser comment s'opère exactement l'influence entrée-état ou état-sortie, pour pouvoir répondre à des questions telles que :

- une action sur l'entrée permet-elle de passer d'un état donné à un autre ?
- l'observation des sorties permet-elle de connaître l'état initial $x(t_o)$ du système ?

C'est là qu'interviennent les notions bien connues de commandabilité-observabilité. Comme il subsiste concernant ces notions, pourtant classiques, un certain flou dans la terminologie (parle t'on par exemple de commandabilité en temps fini ou infini, ou encore de commandabilité différentielle ?), il a paru utile de préciser en annexe 1.B. les définitions adoptées.

Rappelons pour terminer qu'un système dynamique est stationnaire si φ et r commutent avec l'opérateur de décalage temporel. Par "non stationnaire", on entendra "non nécessairement stationnaire".

2. Notion de réalisation pour une classe de systèmes dynamiques linéaires.

On considère une classe de systèmes dynamiques Σ (décrits par des opérateurs entrée/sortie) pour lesquels :

- l'espace d'état est de dimension finie,
- le temps est continu,
- φ est linéaire en x et u ; r est linéaire en x.

Définition 1.1

On appelle réalisation de dimension n du système Σ, si elle existe, un modèle de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t)\, x(t) + G(t)\, u(t) \\ z(t) &= H(t)\, x(t) \end{aligned} \qquad (1\text{-}1)$$

où : . $x(.) \in \mathbb{R}^n$, $u(.) \in \mathbb{R}^p$, $z(.) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie, u(.) étant pris à support compact et de carré sommable (hypothèse 1-2).

. F(.), G(.), H(.) matrices d'évolution, de commande et d'observation, de dimensions appropriées sont supposées continues sur $\mathbb{R}$ (hypothèse 1-3).

Par extension, on désignera par réalisation de Σ le triplet $\{F(.), G(.), H(.)\}^n$ (noté aussi $\{F,G,H\}_t^n$ l'exposant n rappelant la dimension et l'indice t le temps). ■

Il est clair qu'un tel modèle, quand il existe, n'est pas unique. En effet, la base de coordonnées utilisée pour décrire l'état est arbitraire puisque l'opérateur entrée/sortie initial ne contient sur elle aucune information. Ceci signifie que F(.) est totalement non spécifiée (exception faite pour sa dimension). Il y a évidemment des choix plus ou moins heureux : ainsi on prendra de préférence des F(.) continues, bornées et uniformément asymptotiquement stables.

3. Réponse impulsionnelle - Fonction de pondération - Réponse impulsionnelle étendue associées à une réalisation.

Théorème 1.1 [S1]

Sous les hypothèses (1-2) et (1-3) (non minimales) et pour toute phase initiale (t_o, x_o), le système (1-1) admet presque partout sur $\mathbb{R}$ une solution unique z(t) absolument continue, de carré localement sommable définie sur (t_o, ∞) par :

$$z(t) = H(t)\,\Phi(t,t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^{t} H(t)\;\Phi(t,\tau)G(\tau)u(\tau)\,d\tau \qquad (1\text{-}4)$$

La matrice de transition $\Phi(t,\tau)$ égale à $X(t)\,X^{-1}(\tau)$ pour toute solution régulière X(t) de $\dot{X}(t) = F(t)\,X(t)$ vérifie la loi de composition

$$\Phi(t_1,t_2)\;\Phi(t_2,t_3) = \Phi(t_1,t_3)$$

$$\mathcal{H}(t,\tau) = \begin{cases} H(t)\ \Phi\ (t,\tau)\ G(\tau) + J(t)\delta(t-\tau) & \text{si } t \geq \tau \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases}$$

Une réalisation sera donc un quadruplet de matrices $\{F,G,H,J\}$ où J est la matrice du terme impulsionnel dans $\mathcal{H}(t,\tau)$ et $\{F,G,H\}$ une réalisation au sens de la définition (1-2).

8. Conclusion.

On retiendra surtout de ces rappels la présentation de la fonction $\Lambda(.,.)$, réponse impulsionnelle étendue d'un système dynamique.

Cette fonction, que nous retrouverons au chapitre 2, associée à des modèles de processus stochastiques, fait l'objet des principaux résultats présentés ici.

Chapitre II

Réalisations markoviennes - Rappels

1. Processus à représentation markovienne.

Soit un processus gaussien centré $y(t)$ (de caractéristiques stochastiques entièrement décrites par sa covariance $E\{y(t)y'(\tau)\} = \Lambda(t,\tau)$).

On cherche à modéliser $y(t)$ à l'aide d'un processus markovien auxiliaire $x(t)$ et d'un bruit blanc $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t$. La démarche est un peu analogue à celle qui nous a conduit à la notion de système dynamique, en ce sens que le processus $x(t)$ représente la "mémoire" stochastique du processus $y(t)$ et le bruit blanc $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t$ l'"entrée" (ou information) stochastique au temps t (notons qu'ici les caractéristiques de cette entrée ne font pas partie des données).

Une définition plus formelle est la suivante :

Définition 2-1 [F10].

Un processus gaussien centré $y(t)$ est dit admettre une représentation markovienne, s'il existe un processus markovien $x(t)$, non nécessairement de même dimension, et un bruit blanc $w(t)$ tels que :

$$y(t) = H(t)\, x(t) + w(t) \qquad (2\text{-}1) \quad \blacksquare$$

Avant de généraliser la notion de réalisation markovienne donnée dans FAURRE [F10] on rappellera quelques propriétés des processus gaussiens markoviens.

Théorème 2-1 [F10].

Le processus gaussien centré $x(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de covariance $\Lambda_x(t,\tau)$, de variance $\Lambda_x(t,t) > 0$ est markovien si et seu-

lement si la matrice projecteur $\Phi(t,\tau) = \Lambda_x(t,\tau)\ \Lambda_x^{-1}(\tau,\tau)$ vérifie la loi de composition :

$$\Phi(s_1,s_2)\Phi(s_2,s_3) = \Phi(s_1,s_3) \qquad s_1>s_2>s_3 \tag{2-2}$$

De plus, si $\Phi(t,\tau)$ est dérivable en t_+ pour $t = \tau$, alors Φ est prolongeable ($\Phi(\tau,t) = \Phi^{-1}(t,\tau)$ si $\tau < t$), dérivable en t partout et il existe une matrice $n \times n$, $F(t)$, telle que :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,\tau) = F(t)\ \Phi(t,\tau); \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(t,\tau) = -\Phi(t,\tau)\ F(\tau) \tag{2-3}$$

Théorème 2-2 [F10].

Soit x(t) un processus gaussien centré dont la covariance $\Lambda_x(t,\tau)$ vérifie les deux hypothèses :

i) $\Lambda_x(t,\tau)$ est dérivable en t_+ pour $t = \tau$,

ii) $\Lambda_x(t,t)$ est absolument continue par rapport à t.

x(t) est markovien si et seulement s'il vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$dx(t) = F(t)\ x(t)\ dt + dV(t) \tag{2-4}$$

où $$F(t) = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t_+}(t,\tau)\right]_{t=\tau} \tag{2-5}$$

et V(t) est un processus gaussien à accroissements indépendants de covariance $\Lambda_V(t,\tau) = \int_0^{\min(t,\tau)} Q(\alpha)\ d\alpha$

avec $Q(\alpha) = \mathring{\Lambda}_x(\alpha,\alpha) - F(\alpha)\ \Lambda_x(\alpha,\alpha) - \Lambda_x(\alpha,\alpha)\ F'(\alpha)$ (2-6)

2. Réalisations markoviennes.

Définition 2-2.

On appelle réalisation markovienne non stationnaire (si elle existe) d'un processus gaussien centré y(t) un modèle de la forme

$$\mathring{x}(t) = F(t)\ x(t) + v(t) \tag{2-7}$$

$$y(t) = H(t)\ x(t) + w(t) \tag{2-8}$$

où : . x(t) est un processus gaussien markovien (de variance P(t))

. $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t$ est un bruit blanc de covariance :

$$E\left\{\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}_t [v'w']_\tau\right\} = \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S'(t) & R(t) \end{bmatrix} \delta(t-\tau) \qquad (2\text{-}9)$$

et pour lequel les hypothèses suivantes sont satisfaites :

. (F,L) est une paire totalement commandable (si Q = LL') (2-10)

. (H,F) est une paire totalement observable (2-11)

. F,H,G = [PH' + S],R sont continues sur $\mathbb{R}$ ■ (2-12)

On peut faire ici des remarques similaires à celles du chapitre précédent. Les lois statistiques de y n'impliquent rien sur la base utilisée pour décrire x, ni sur la condition initiale $x(t_o)$.

Cette dernière peut être de nature stochastique. Nous choisirons un vecteur $x(t_o)$ stochastiquement indépendant de v_s et w_s, $s \geq t_o$ centré et de variance $E\{x(t_o)x'(t_o)\} = P_o$ où P_o est une matrice positive semie définie symétrique arbitraire. Il peut être commode, le cas échéant, d'avoir $P(t_o) = P_o = o$ (2-13)

On peut prendre t_o égal à $-\infty$ si l'on a

. F et H bornées, (2-14)

. F uniformément asymptotiquement stable (2-15)

et il est clair que la condition initiale $P(t_o) = P_o$ a une influence décroissante à mesure que t_o tend vers $-\infty$ (autrement dit, à la limite, deux P_o différentes conduisent à la même matrice P(.)).

Notons enfin que si $\Lambda(t,\tau)$ est stationnaire, il existe des choix particuliers de F et P_o pour lesquels F,G et H sont des matrices constantes (si t_o est fini, P_o ne doit pas être supposée nulle ; ceci entrainerait que l'une des matrices F,G ou H varie).

Calcul de $\Lambda(t,\tau)$ en fonction des éléments de la réalisation.

On sait que la solution de l'équation différentielle stochastique (2-7) peut s'écrire pour $t > t_o$:

$$x(t) = \Phi(t,t_o)x(t_o) + \int_{t_o}^{t} \Phi(t,\tau)\, v(\tau)\, d\tau \qquad (2\text{-}16)$$

de (2-13) et (2-16) on déduit que pour t et $\tau \geq t_o$:

$$E\{x_t x'_\tau\} = \Phi(t,\tau)\, P(\tau)\, 1(t-\tau) + P(t)\, \Phi'(\tau,t)\, 1(\tau-t) \qquad (2\text{-}17)$$

où :

- $P(t) = E\{x_t x'_t\} = \Phi(t,t_o)\, P_o\, \Phi'(t,t_o) + \int_{t_o}^{t} \Phi(t,\tau) Q(\tau) \Phi'(t,\tau) d\tau$
- $1(\alpha) = o;\ 1/2,\ 1$ suivant que α est négatif, nul ou positif.

En tenant compte de (2-8) et (2-17) dans l'expression de $E\{y_t y'_\tau\} = \Lambda(t,\tau)$, on obtient, si G(.) désigne la fonction $G(.) = P(.)H'(.) + S(.)$:

$$\Lambda(t,\tau) = H(t)\, \Phi(t,\tau) G(\tau) 1(t-\tau) + G'(t)\, \Phi'(\tau,t) H'(\tau) 1(\tau-t) + R(t)\, \delta(t-\tau) \qquad (2\text{-}18)$$

Définition 2-3

On dira que $\{F(.), G(.), H(.), R(.)\}$ représente une covariance donnée $\Lambda(.,.)$ si la matrice $\Phi(.,.)$ associée à F(.) et les matrices G(.), H(.), R(.) vérifient (2-18). ■

Il est clair que formellement nous sommes ramenés, dans les cas déterministe et stochastique, à une étude identique des réalisations d'une fonction $\Lambda(.,.)$ du type (2-18). Demeure en particulier tout ce qui concerne transformations et relations d'équivalence (cf. chap 1, § 6).

Une différence importante doit toutefois être soulignée : La donnée d'une représentation de $\Lambda(.,.)$ définit complètement une réalisation de système dynamique dans le cas déterministe. Ce n'est

pas le cas pour une réalisation markovienne dans le cas stochastique. Le choix de la variance P_t de x_t constitue un degré de liberté supplémentaire, comme le précise le théorème suivant :

Théorème 2-3.

L'ensemble des réalisations markoviennes d'un processus y(.) de covariance $\Lambda(.,.)$ donnée par (2-18) est caractérisé dans une base donnée par les équations (2-7), (2-8) et l'ensemble des matrices P symétriques telles que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$FP + PF' - \dot{P} = -Q \qquad (2\text{-}19)$$

$$G - PH' = S \qquad (2\text{-}20)$$

$$P \geqslant o \qquad (2\text{-}21)$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geqslant o \qquad (2\text{-}22)$$

□

On vient de le voir, un modèle (2-7), (2-8) excité par le bruit blanc de covariance (2-9) génère un processus y(.) de covariance $\Lambda(.,.)$ de la forme (2-18).

Inversement, un processus de covariance (2-18) ne peut être généré par un tel modèle que s'il existe des matrices P(.),Q(.) S(.) vérifiant (2-20), (2-19) (caractère markovien de x, théorème (2-2)) et si de plus :

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geqslant o \qquad P \geqslant o$$

car ce sont des covariances.

Chapitre III

Lemme positif réel pour les systèmes linéaires non stationnaires

1. Introduction

On considère les fonctions matricielles $\Lambda(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{m\times m}$ de la forme suivante :

$$\Lambda(t,\tau) = H(t)\,\Phi(t,\tau)G(\tau)1(t-\tau)+G'(t)\,\Phi'(\tau,t)H'(\tau)1(\tau-t) + R(t)\,\delta(t-\tau) \qquad (3\text{-}1)$$

où : $1(x) = 0, 1/2, 1$ pour x respectivement négatif, nul, positif,
$\Phi(.,.)$ est la matrice de transition associée à la nxn matrice $F(.)$ (i.e vérifiant (2-2) et (2-3)),
$H(.),F(.),G(.),R(.)$ de dimensions appropriées sont continues et bornées sur $\mathbb{R}$. $R(.)$ est symétrique et définie positive.

On fait de plus les hypothèses suivantes (3-2) :

i) la paire (H_t,F_t) est totalement observable sur $\mathbb{R}$.
ii) la paire (F_t,G_t) est totalement commandable sur $\mathbb{R}$
iii) la matrice F_t est uniformément asymptotiquement stable.

Nous avons vu comment ces fonctions intervenaient dans l'étude des réalisations de systèmes dynamiques et dans celle des réalisations markoviennes de processus gaussiens.

L'objet du présent chapitre est d'étendre au cas non stationnaire le "lemme positif réel" (voir FAURRE [F10]).

2. Définition(3-1)

La fonction matricielle $\Lambda(.,.)$ définie précédemment est de type réel non négatif (réel positif) sur $\mathbb{R}$ si, quelle que soit la fonction $u(.)\in\mathcal{U}$ $\{u(.) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, non identiquement nulle, à

support compact, de carré sommable } on a :

$$U'\Lambda\, U_t = \int_{t_o}^{t}\int_{t_o}^{t} u'(\alpha)\ \Lambda(-\alpha,-\beta)u(\beta)\ d\alpha\ d\beta \geq o \qquad (>o)$$

3 - Lemme positif réel dans le cas non stationnaire.

Théorème 3-1 (lemme positif réel)

Soit $\Lambda(.,.)$ de la forme (3-1), telle que les hypothèses (3-2) soient satisfaites. $\Lambda(.,.)$ est de type réel non négatif sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $P(.)$, $Q(.)$, $S(.)$ définies sur R (P et Q symétriques, P dérivable) telles que :

$$\begin{cases} FP + PF' - \dot{P} = -Q & (3\text{-}3) \\ G - PH' = S & (3\text{-}4) \\ P > o & (3\text{-}5) \\ \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq o & (3\text{-}6) \end{cases}$$

■

Sous-ensemble de commandes $\mathcal{E}(t_o,t,\xi)$

On désignera par $\mathcal{E}(t_o,t,\xi)$ l'ensemble des fonctions u de $\mathcal{U}$ transférant le système

$$\dot{x}(\alpha) = F'(-\alpha)x(\alpha) + H'(-\alpha)u(\alpha)$$

de la phase (t_o,o) à la phase (t,ξ).

On peut écrire aussi, d'après les hypothèses faites :

$$\mathcal{E}(t_o,t,\xi) = \{u \in \mathcal{U};\ \text{pour } x(\alpha) = \int_{t_o}^{\alpha} \Phi'(-\beta,-\alpha)H'(-\alpha)u(\beta)d\beta,$$

et $\alpha \in [t_o,t]$, $x(t) = \xi$ }

On notera que $\mathcal{E}(t_o,t,\xi)$ est non vide d'après l'hypothèse $(3\text{-}2)_i$

Nous aurons besoin, pour démontrer le lemme positif réel, du résultat suivant :

Lemme 3.2

Sous l'hypothèse* $(\bar{F}', \bar{H}')$ totalement commandable, quels que soient :

i) les temps t_o et $t \in \mathbb{R}$, t_o fixé, $t > t_o$

ii) l'état ξ

iii) la commande $u(.) \in \mathcal{E}(t_o, t, \xi)$

iv) le triplet $\{P,Q,S\}_\alpha$ vérifiant (3-3) et (3-4) $\forall \alpha > t_o$,

on peut écrire :

$$U' \Lambda U_t = \xi' \bar{P}_t \xi + \int_{t_o}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{S} \\ \bar{S}' & \bar{R} \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha d\alpha \qquad (3\text{-}7)$$

sous la contrainte :

$$x(\alpha) = \int_{t_o}^{t} \Phi'(-\beta,-\alpha) H'(-\beta) u(\beta)\, d\beta \; ; \; x(t_o) = o, \; x(t) = \xi \qquad (3\text{-}8)$$

ou encore :

$$\dot{x}(\alpha) = F'(-\alpha)x(\alpha) + H'(-\alpha)u(\alpha) \; ; \; x(t_o) = o, \; x(t) = \xi . \qquad (3\text{-}9)$$

Démonstration du lemme (3-2)

Soit donc t_o fixé. Posons $V(t,\xi) = \int_{t_o}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{S} \\ \bar{S}' & \bar{R} \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha d\alpha$

Les relations (3-3) et (3-4) donnent :

$$V(t,\xi) = \int_{t_o}^{t} \{-x'[\bar{F}\bar{P} + \bar{P}\bar{F}']x + x'\dot{\bar{P}}x\}_\alpha + 2\{x'[\bar{G} - \bar{P}\bar{H}']u\}_\alpha + \{u'\bar{R}u\}_\alpha \, d\alpha$$

(3-9) entraine : $\{-x'[\bar{F}\bar{P}+\bar{P}\bar{F}']x\}_\alpha = \{x'\bar{P}[-\mathring{x}+\bar{H}'u] + [-\mathring{x}'+u'\bar{H}]\bar{P}x\}_\alpha$

D'autre part : $\overset{o}{\bar{P}}(.) = -\overset{o}{\bar{P}}(.)$ et $V(t,\xi)$ s'écrit alors :

$$V(t,\xi) = \int_{t_o}^{t} -\{\frac{d}{dt}(x'\bar{P}x)\}_\alpha + \{x'\bar{G}u\}_\alpha + \{u'\bar{G}'x\}_\alpha + \{u'\bar{R}u\}_\alpha \, d\alpha$$

$$V(t,\xi) = -\xi'\bar{P}_t\xi + \int_{t_o}^{t} \{x'\bar{G}u\}_\alpha + \{u'\bar{G}'x\}_\alpha + \{u'\bar{R}u\}_\alpha \, d\alpha$$

---

* On rappelle que $\bar{F}(t)$ désigne la matrice $F(-t)$

En remplaçant x par sa valeur tirée de (3-8), on voit apparaitre au second membre l'expression de $U' \Lambda U_t$ telle qu'elle résulte de la définition de Λ et le lemme est démontré.

Démonstration de la condition nécessaire

Par suite des hypothèses faites, on pourra prendre $t_o = -\infty$ ($\mathcal{E}(t,\xi)$ désignant $\mathcal{E}(-\infty,t,\xi)$).

Soit alors $\Lambda(.,.)$ de type réel non négatif sur $\mathbb{R}$. Définissons $P^*(.)$ par :

$$\xi' \overline{P_t^*} \xi = \inf_{u \in \mathcal{E}(t,\xi)} U' \Lambda U_t \qquad (3\text{-}10)$$

Cette définition est bien cohérente : en effet :

$\{U' \Lambda U_t , \quad u \in \mathcal{E}(t,\xi)\}$ ensemble de scalaires positifs ou nuls admet un infimum $L(t,\xi)$ (positif ou nul et unique)

D'autre part $L(t,\xi)$ est une forme quadratique en ξ. Il suffit pour le montrer de vérifier que :

$$\begin{cases} L(t,\lambda\xi) = \lambda^2 L(t,\xi) & (3\text{-}11) \\ L(t, \xi+\eta) + L(t,\xi-\eta) = 2 L(t,\xi) + 2 L(t,\eta) & (3\text{-}12) \end{cases}$$

Soient les commandes $u \in \mathcal{E}(t,\xi)$ et $v \in \mathcal{E}(t,\lambda\xi)$. Alors :

$$\begin{cases} \lambda u \in \mathcal{E}(t,\lambda\xi) \text{ d'où } L(t,\lambda\xi) \leq \lambda^2 U'\Lambda U \\ \text{donc } L(t,\lambda\xi) \leq \lambda^2 L(t,\xi) & (3\text{-}13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda^{-1} v \in \mathcal{E}(t,\xi) \text{ d'où } L(t,\xi) \leq \lambda^{-2} V' \Lambda V \\ \text{donc } L(t,\xi) \leq \lambda^{-2} L(t,\lambda\xi). & (3\text{-}14) \end{cases}$$

(3-13) et (3-14) prouvent (3-11).

Soient de plus les commandes $u_1 \in \mathcal{E}(t,\xi+\eta)$ et $u_2 \in \mathcal{E}(t,\xi-\eta)$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = u_3 \in \mathcal{E}(t,2\xi) \text{ d'où } L(t,2\xi) \leq U'_3 \Lambda U_3 \\ u_1 - u_2 = u_4 \in \mathcal{E}(t,2\eta) \text{ d'où } L(t,2\eta) \leq U'_4 \Lambda U_4 \end{cases}$$

Or $U'_3 \wedge U_3 + U'_4 \wedge U_4 = 2\,U'_1 \wedge U_1 + 2\,U'_2 \wedge U_2$

donc $2L(t,\xi) + 2L(t,\eta) \leq L(t,\xi+\eta) + L(t,\xi-\eta)$ (3-15)

L'inégalité inverse se démontre de la même manière en partant de $v_1 \in \mathcal{E}(t,\xi)$ et $v_2 \in \mathcal{E}(t,\eta)$. D'où (3-12).

Si on impose que P* soit symétrique, (3-10) définit bien une matrice unique, non négative définie sur $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est de plus dérivable.

P*(.) est dérivable sur $\mathbb{R}$:

En écrivant le lemme (3-2) pour la phase $(t+\Delta t,\xi)$ et le triplet $\{0,0,G\}$, on obtient :

$$\xi' \bar{P}^*_{t+\Delta t}\, \xi = \inf_{u \in \mathcal{E}(t+\Delta t,\xi)} \int_{-\infty}^{t+\Delta t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} 0 & \bar{G} \\ \bar{G}' & \bar{R} \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha d\alpha$$

Si $(t,\bar{\xi})$ appartient à la trajectoire de l'espace des phases réalisant l'infimum, le principe d'optimalité permet d'écrire :

$$\xi' \bar{P}^*_{t+\Delta t}\, \xi = \inf_{u \in \mathcal{E}(t,\xi^-)} \int_{-\infty}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} 0 & \bar{G} \\ \bar{G}' & \bar{R} \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha d\alpha$$

$$+ \inf_{u \in \tilde{\mathcal{E}}(t+\Delta t,\xi)} \int_{t}^{t+\Delta t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} 0 & \bar{G} \\ \bar{G}' & \bar{R} \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha d\alpha \qquad (3\text{-}16)$$

$\tilde{\mathcal{E}}(t+\Delta t,\xi)$ étant l'ensemble des commandes de $\mathcal{U}$ transférant le système $(\bar{F}',\bar{H}')$ de la phase (t,ξ^-) à la phase $(t+\Delta t,\xi)$.

Le premier infimum au second membre de (3-16) est égal à $\xi^{-\prime} \bar{P}^*_t\, \xi^-$.

La quantité sous le signe somme dans le second infimum peut s'écrire (u est localement sommable) :

$$\inf_{u \in \tilde{\mathcal{E}}(t+\Delta t,\xi)} \int_t^{t+\Delta t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} 0 & \bar{G} \\ \bar{G}' & \bar{R} \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_a d\alpha$$

$$= \Delta t \left[\inf_{u_o \text{ constante}} \{ [\xi' u_o'] \begin{bmatrix} 0 & \bar{G} \\ \bar{G}' & \bar{R} \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} \xi \\ u_o \end{bmatrix} \} \right] + O(\Delta t^2)$$

Donc :

$$\xi' [\bar{P}^*_{t+\Delta t} - \bar{P}^*_t] \xi = \xi^{-'} \bar{P}^*_t \xi^- - \xi' \bar{P}^*_t \xi + O(\Delta t^2) + \Delta t \text{ [constante]}$$

soit :

$$\xi' \frac{[\bar{P}^*_{t+\Delta t} - \bar{P}^*_t]}{\Delta t} \xi = [\xi^{-'} + \xi'] \bar{P}^*_t \left[\frac{\xi^- - \xi}{\Delta t} \right] + \frac{O(\Delta t^2)}{\Delta t} + \text{constante.}$$

pour toute phase (t,ξ). D'après les hypothèses faites, la trajectoire optimale est dérivable : $\frac{\xi^- - \xi}{\Delta t}$ tend vers une limite finie quand Δt tend vers o.

La démonstration du fait que $P^*(.)$ est strictement positive est remise au chapitre suivant.

Soient alors sur $\mathbb{R}$:

i) $Q^*_t = -[FP^* + P^*F']_t + \dot{\bar{P}}^*_t$

ii) $S^*_t = G_t - P^*_t H'_t$

iii) $u \in \mathcal{E}(t,\xi)$

iv) $v \in \mathcal{E}(t+\Delta t,\zeta)$ avec
- $\Delta t > o$
- $v(.) \equiv u(.)$ sur $]-\infty,t]$
- $v(.) = v_o$ constante sur $]t,t+\Delta t]$

Ecrivons le lemme (3-2) pour le triplet $\{P^*,Q^*,S^*\}$ et pour chacune des commandes $u(.)$ et $v(.)$. On peut soustraire les deux expressions obtenues membre à membre ; ceci donne :

$$(V'\Lambda V_{t+\Delta t} - \zeta'\bar{P}^*_{t+\Delta t}\,\zeta) - (U'\Lambda U_t - \xi'\,\bar{P}^*_t\,\xi)$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} [x'v'_o]_\alpha \begin{bmatrix} \bar{Q}^* & \bar{S}^* \\ \bar{S}^{*\prime} & \bar{R} \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} x \\ v_o \end{bmatrix}_\alpha d\alpha$$

$$= \Delta t[\xi'\ v'_o] \begin{bmatrix} \bar{Q}^* & \bar{S}^* \\ \bar{S}^{*\prime} & \bar{R} \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} \xi \\ v_o \end{bmatrix} + O(\Delta t^2)$$

D'après la définition de P^*_t , $V'\Lambda\, V_t - \zeta'\bar{P}^*_t\zeta \geq o \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Donc :

$$\Delta t[\xi'v'_o] \begin{bmatrix} \bar{Q}^* & \bar{S}^* \\ \bar{S}^{*\prime} & \bar{R} \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} \xi \\ v_o \end{bmatrix} \geq - O(\Delta t^2) - (U'\Lambda U_t - \xi'\bar{P}^*_t\xi)$$

Or pour tout $\varepsilon > o$, il existe $u(.)$ et Δt_o tels que :

$$\begin{cases} O(\Delta t_o^2) < \dfrac{\varepsilon \Delta t_o}{2} & \text{(par définition de } O(\Delta t^2)) \\ (U'\Lambda U_t - \xi'\bar{P}^*_t\,\xi) < \dfrac{\varepsilon \Delta t_o}{2} & \text{(par définition de } P^*(.)) \end{cases}$$

Donc : $[\xi'v'_o] \begin{bmatrix} \bar{Q}^* & \bar{S}^* \\ \bar{S}^{*\prime} & \bar{R} \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} \xi \\ v_o \end{bmatrix} > - \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > o$

soit : $[\xi'v'_o] \begin{bmatrix} \bar{Q}^* & \bar{S}^* \\ \bar{S}^{*\prime} & \bar{R} \end{bmatrix}_t \begin{bmatrix} \xi \\ v_o \end{bmatrix} \geq o$

Les vecteurs ξ (totale commandabilité) et v_o étant arbitraires, on a bien :

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}^* & \bar{S}^* \\ \bar{S}^{*\prime} & \bar{R} \end{bmatrix}_t \geq o \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

soit :

$$\begin{bmatrix} Q^* & S^* \\ S^{*\prime} & R \end{bmatrix}_t \geq o \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

ce qui achève de démontrer la condition nécessaire.

Démonstration de la condition suffisante :

S'il existe $\{P,Q,S\}_t$ vérifiant (3-3) à (3-6) le second membre de (3-7) est non négatif et par suite du lemme (3-2), $U'\Lambda\, U_t$ est non négative.

4. Problème continu et problème continu dual

A toute représentation $\{F,G,H,R\}$ d'une fonction $\Lambda(.,.)$ de type réel non négatif sur $\mathbb{R}$, le lemme positif réel associe un ensemble $\mathcal{P}(.)$ de fonctions matricielles $P(.)$ solutions de (3-3) à (3-6).

Définition (3-2)

On appelle problème continu $\{F,G,H,R\}$ le problème consistant à rechercher l'ensemble $\mathcal{P}(.)$.

Définition (3-3)

On appelle problème continu dual $\{\tilde{F},\tilde{G},\tilde{H},\tilde{R}\}$ (du problème $\{F,G,H,R\}$ associé à $\Lambda(t,\tau)$) le problème continu $\{\bar{F}',\bar{H}',\bar{G}',\bar{R}\}$ associé à $\tilde{\Lambda}(t,\tau) = \Lambda(-t,-\tau)$.

Théorème (3-3)

$\mathcal{P}$ et l'ensemble $\tilde{\mathcal{P}}$ dual sont simultanément vide ou non vide. ■

On voit en effet, en revenant à la définition de la forme quadratique $U'\Lambda\, U_t$, que $\Lambda(t,\tau)$ et $\Lambda(-t,-\tau)$ sont simultanément de type réel non négatif.

5. Enoncés équivalents du lemme positif réel.

Le théorème (3-3) permet d'écrire immédiatement :

Théorème 3-4

$\Lambda(.,.)$ est de type réel non négatif sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $\hat{P}(.)$, $\hat{Q}(.)$, $\hat{S}(.)$ définies sur $\mathbb{R}$ ($\hat{P}$ et $\hat{Q}$ symétriques, $\hat{P}$ dérivable) telles que

$$\begin{cases} F'\hat{P} + \hat{P}F + \mathring{\hat{P}} = -\hat{Q} & (3\text{-}15) \\ H' - \hat{P}G = \hat{S} & (3\text{-}16) \\ \hat{P} > o & (3\text{-}17) \\ \begin{bmatrix} \hat{Q} & \hat{S} \\ \hat{S}' & \hat{R} \end{bmatrix} \geq o & (3\text{-}18) \end{cases}$$

□

Désignons par $\hat{\mathcal{P}}(.)$ l'ensemble des fonctions $\hat{P}(.)$ solutions de (3-15) à (3-18) pour une représentation $\{F,G,H,R\}$ de $\Lambda(.,.)$ donnée.

Il suffit alors d'appliquer le théorème (3-1) à la fonction $\tilde{\Lambda}(.,.)$ pour voir que $\tilde{\hat{\mathcal{P}}}(.) = \{\tilde{\hat{P}}(.)\}$ constitue l'ensemble $\hat{\mathcal{P}}(.)$ cherché.

Remarque :

La triple équivalence suivante résume les trois théorèmes précédents :

Λ de type réel non négatif $\iff \mathcal{P}(.) \neq \emptyset \iff \tilde{\mathcal{P}}(.) \neq \emptyset \iff \hat{\mathcal{P}}(.) \neq \emptyset$

Théorème 3-5

$\Lambda(.,.)$ est de type réel non négatif sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $P(.)$, $L(.)$, $N(.)$ définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} FP + PF' - \mathring{P} = -LL' & (3\text{-}19) \\ G - PH' = LN' & (3\text{-}20) \\ R = NN' & (3\text{-}21) \\ P > o & (3\text{-}22) \end{cases}$$

□

En effet, la matrice $\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix}$ du théorème (3-1) étant positive semi définie peut être factorisée sous la forme :

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ N \end{bmatrix} [L'N']$$

ce qui démontre le théorème.

Remarques :

Les résultats précédents demeurent valides sur un intervalle $]-T, T[$ si la valeur de $t_o = -T$ choisie est finie.
Dans ce cas, l'hypothèse d'asymptotique stabilité n'est plus nécessaire.

Les différentes hypothèses de continuité peuvent être remplacées par des hypothèses de continuité par morceaux. Les relations du lemme restent alors vérifiées "par morceaux".

6 - Conclusion.

Le lemme positif réel stationnaire a de très nombreuses applications (identification stochastique et filtrage [F10], hyperstabilité [P2], systèmes dissipatifs [W5], réseaux électriques [A17] par exemple).

On vient d'établir une généralisation simple de ce lemme au cas non stationnaire et l'on verra ci-dessous comment différentes applications connues se généralisent également.

Chapitre 4

Etude de l'ensemble $\mathcal{P}(.)$

Les résultats de ce chapitre généralisent au cas non stationnaire des résultats démontrés dans FAURRE [F10], et GERMAIN [G1]. On rappelle que $\mathcal{P}(.)$, en abrégé $\mathcal{P}$, désigne l'ensemble des fonctions matricielles P(.) solutions du problème continu {F,G,H,R}. On notera $\mathcal{P}_t$ l'ensemble des matrices P_t.

4-1 Propriétés fondamentales. Maximum et minimum de $\mathcal{P}$. Dualité.

Théorème 4-1.

$\mathcal{P}$ est un ensemble convexe, fermé, défini positif * admettant un maximum P^* et un minimum P_*.

Les fonctions $\bar{P}^{-1}$ constituent l'ensemble $\tilde{\mathcal{P}}$ solution du problème dual $\{\bar{F}', \bar{H}', \bar{G}', \bar{R}\}$.

Enfin, $\mathcal{P}_t$ croit ou décroit (au sens de la relation d'inclusion) si respectivement R_t croit ou décroit (au sens de la relation d'ordre définie sur les matrices). ■

La démonstration du théorème découle directement des lemmes suivants :

Lemme 4-2 (dualité)

Si $\mathcal{P}$ est défini positif et non vide, pour tout élément P de $\mathcal{P}$, $\bar{P}^{-1}$ est solution du problème continu dual. ■

---

* $\mathcal{P}_t$ est dit défini positif (" $\mathcal{P}_t > o$") s'il est constitué de matrices définies positives. $\mathcal{P}$ est défini positif si $\mathcal{P}_t$ l'est pour tout t.

Pour tout P de $\mathcal{P}$ (Q et S étant les matrices associées) on a :

i) $P^{-1} > o$

ii) $$\begin{bmatrix} -F'P^{-1} - P^{-1}F - [\dot{P}^{-1}] & H' - P^{-1}G \\ H - G'P^{-1} & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P^{-1} & o \\ o & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P^{-1} & o \\ o & -P^{-1} \end{bmatrix} \geq o$$

Donc P^{-1} appartient à $\hat{\mathcal{P}} = \bar{\bar{\mathcal{P}}}$ (théorème 3-4) et le lemme est démontré.

Lemme 4-3 (solutions extrémales).

Tout $\mathcal{P}$ défini positif, non vide est un ensemble convexe, fermé, admettant un maximum P* et un minimum P_* ; autrement dit :

$$P_* \leq P \leq P^* \qquad \forall\, P \in \mathcal{P} \qquad \blacksquare$$

Soit P dans $\mathcal{P}$, le lemme (3-2) permet d'écrire pour toute phase (t,ξ) et compte tenu de la définition de P* :

$$\xi' \bar{P}^*_t \xi = \xi \bar{P}_t \xi + \inf_{u \in \mathcal{E}(t,\xi)} \int_{-\infty}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{S} \\ \bar{S}' & \bar{R} \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha d\alpha$$

d'où l'on déduit que P* est maximum dans $\mathcal{P}$ (l'infimum du second membre est non négatif).

$\mathcal{P}$ admettant un maximum, c'est aussi le cas pour son dual $\tilde{\mathcal{P}}$ et l'on peut définir la fonction P_* par :

$$P_* = [\bar{\tilde{P}}^*]^{-1}$$

Cette fonction P_* est minimum dans $\mathcal{P}$. En effet, pour tout élément P de $\mathcal{P}$, P^{-1} appartient à $\bar{\tilde{\mathcal{P}}}$ (lemme 4-2) et par conséquent $P^{-1} \leq \bar{\tilde{P}}^*$, soit $P \geq [\bar{\tilde{P}}^*]^{-1} = P_*$.

Le caractère convexe de $\mathcal{P}$ se démontre immédiatement.

Remarque

L'hypothèse suivant laquelle la paire (F,G) est totalement commandable est utilisée pour définir P_*.

Lemme 4-4

Si $\mathcal{P}$ est non vide, les propriétés "$\mathcal{P}$ est défini positif" et "P* est définie positive" sont équivalentes. ■

Si P* est définie positive, $[\bar{P}^*]^{-1} = \tilde{P}_*$ l'est également, donc aussi $[\tilde{\bar{P}}^*]^{-1} = P_*$.

Or pour tout P dans $\mathcal{P}$, $[P-P_*]$ est semie définie positive. $\mathcal{P}$ est donc défini positif. La réciproque est triviale.

Lemme 4-5

Soient :

$\mathcal{P}_t$ non vide, solution du problème {F,G,H,R} à l'instant t.

$\mathcal{P}_t^1$ solution du problème {F,G,H,R+ΔR} à l'instant t.

alors :

i) $\Delta R_t \geq o$ entraine $\mathcal{P}_t \subseteq \mathcal{P}_t^1$

ii) $\Delta R_t \leq o$ entraine $\mathcal{P}_t^1 = \emptyset$ ou $\mathcal{P}_t^1 \subseteq \mathcal{P}_t$ ■

Pour tout P_t dans $\mathcal{P}_t$ et $\Delta R_t \geq o$, la matrice :

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R + \Delta R \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta R \end{bmatrix}_t$$

est semie définie positive (comme somme de deux matrices semie définies positives).

Par conséquent, P_t appartient à $\mathcal{P}_t^1$ et le premier point est démontré. Le second se démontre de façon analogue.

Lemme 4-6

Tout ensemble $\mathcal{P}_t$ non vide est défini positif. ■

Soit $\mathcal{P}_t^1$ solution à l'instant t du problème {F,G,H,R+I}. Tout élément P_t de $\mathcal{P}_t$ appartient aussi à $\mathcal{P}_t^1$ (lemme 3-5) et par conséquent (lemme 2-2) :

$$\xi' \bar{P}_t^{1*} \xi = \xi' \bar{P}_t \xi + \inf_{u \in \mathcal{E}(t,\xi)} \left\{ \int_{-\infty}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} \bar{Q} & \bar{S} \\ \bar{S}' & \bar{R} \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha + \int_{-\infty}^{t} u' u_\alpha \, d\alpha \right\}$$

soit

$$\xi' \bar{P}_t^{1*} \xi > \inf_{u \in \mathcal{E}(t,\xi)} \int_{-\infty}^{t} u' u_\alpha \, d\alpha$$

Or, d'après un résultat classique de commande optimale :

$$\inf_{u \in \mathcal{E}(t,\xi)} \int_{-\infty}^{t} u' u_\alpha \, d\alpha = \xi' \, W_t^{-1} \, \xi \qquad (4\text{-}1)$$

où W est la matrice de commandabilité de $(\bar{F}', \bar{H}')$, définie positive par l'hypothèse. Si ρ_t désigne la plus petite valeur propre (strictement positive) de W_t^{-1}, il vient :

$$\xi' \bar{P}_t^{1*} \xi > \xi' W_t^{-1} \xi > \rho_t \, ||\xi||^2 \qquad \forall (t,\xi) \quad (4\text{-}2)$$

donc $P_t^{1*} > o$ et $\mathcal{P}_t^1 > o$ d'où $\mathcal{P}_t > o$ (lemme 3-5).

4-2 Représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ dans le cas régulier.

Nous nous restreindrons pour la fin du chapitre au cas régulier ($R > o$).

Les développements de [F10] ou [W5] se généralisent facilement au cas non stationnaire et nous nous contenterons d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4-7 (Description paramétrique de $\mathcal{P}$: cas continu régulier).

Dans le cas continu et régulier, l'ensemble $\mathcal{P}$ a la représentation paramétrique :

$$P = P_* + \delta P \tag{4-3}$$

$[\delta P]^{-1}$ étant solution de l'équation linéaire en π :

$$\dot{\pi} + F'_* \pi + \pi F_* = - H' R^{-1} H - A \tag{4-4a}$$

avec:

$$F_* = F - S_* R^{-1} H \tag{4-4b}$$

et A décrivant le cône des fonctions matricielles semi-définies positives. De plus la matrice $[Q-SR^{-1}S']$ associée à P est telle que

$$Q - SR^{-1}S' = \delta P \, A \, \delta P \tag{4-5}$$

La description donnée ci-dessus est valable à l'exception d'un ensemble de mesure nulle pour lequel $[P-P_*]_t (\gtrsim o)$ n'est pas inversible.

Corollaire 4-8

Les extrema de $\mathcal{P}$ sont liés par la relation :

$$\frac{d}{dt}([P^*-P_*]^{-1}) + F'_*[P^*-P_*]^{-1} + [P^*-P_*]^{-1}F_* = -H'R^{-1}H \tag{4-6}$$

4-3 Ensemble $\mathcal{P}$ et coercivité.

Définition 4-1

On dit que l'opérateur Λ : $u \rightarrow U'\Lambda U$ est coercif (ou que la forme quadratique $U'\Lambda U$ est coercive) s'il existe une constante positive ρ telle que :

$$U'\Lambda U > \rho ||u||^2 \qquad \forall \, u \in \mathcal{U}$$

Théorème 4-10

Si Λ est coercif, $[P^*-P_*]$ est définie positive. ■

Pour toute représentation $\{F,G,H,R\}$ de $\Lambda(.,.)$, la fonction Λ° représentée par $\{F,G,H,R-\rho I\}$ est de type réel non négatif (se re-

porter à la définition). Soit alors P° appartenant à $\mathcal{P}^\circ$ ($\subset \mathcal{P}$). Pour toute phase (t,ξ) le lemme (3-2) permet d'écrire :

$$\xi'[\bar{P}^*-\bar{P}^\circ]_t\xi = \inf_{u\in\mathcal{E}(t,\xi)} \{\int_{-\infty}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} \bar{Q}^\circ & \bar{S}^\circ \\ \bar{S}^{\circ\prime} & \bar{R}^\circ-\rho I \end{bmatrix}_\alpha \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha$$

$$+ \rho\, u'u_\alpha\, d\alpha\}$$

$$> \rho \inf_{u\in\mathcal{E}(t,\xi)} \int_{-\infty}^{t} u'u_\alpha\, d\alpha$$

$$> \rho\, \xi'\, W_t^{-1}\, \xi$$

où W est la matrice de commandabilité définie positive par hypothèse de $(\bar{F}',\bar{H}')$. Donc :

$$P^* - P_* > P^* - P^\circ > \rho \bar{W}^{-1} > o \qquad (4\text{-}7) \quad \blacksquare$$

Le théorème suivant donne, sous une hypothèse un peu plus forte une triple équivalence qui généralise celle donnée par GERMAIN [G1, th. 4-2] dans le cas stationnaire.

Théorème 4-11

Pour le problème continu et régulier {F,G,H,R} et sous les hypothèses :

- (H,F) uniformément totalement observable
- R uniformément minorée,

les propositions suivantes sont équivalentes :

i) L'opérateur Λ est coercif et uniformément majoré sur R. Autrement dit, pour deux constantes ρ et λ :

$$o < \rho\, ||u||^2 < U'\Lambda U < \lambda ||u||^2 \qquad (4\text{-}8)$$

ii) il existe deux constantes α et β telle que :

$$o < \alpha I < P^*-P_* < \beta I < +\infty \qquad (4\text{-}9)$$

iii) La matrice F_* définie en (4-4b) est exponentiellement asymptotiquement stable.

Démonstration

i) → ii)

On vient de le voir [cf. (4-7)] : $P^* - P_* > \rho\ \bar{W}^{-1}$

D'autre part, d'après (4-9) et pour toute phase (t,ξ) :

$$\xi'[\bar{P}^*-\bar{P}_*]_t\ \xi < \xi'\bar{P}^*\ \xi < \lambda\ ||u^*||_t^2$$

avec : $u_t^* = -[\bar{H}\ W^{-1}\ \xi]_t$

Or l'hypothèse d'uniforme totale observabilité de (H,F) entraîne :

$$0 < \varepsilon_1 I < W < \varepsilon_2 I < +\infty$$

et (4-9) est démontré.

ii) → iii)

$(\bar{F}',\bar{H}')$ et $(\bar{F}'_*,\bar{H}')$ sont simultanément uniformément totalement commandables, comme on peut le voir en revenant aux matrices de commandabilité.

La relation (4-6) considérée comme équation de Lyapunov implique alors la condition iii) (voir référence [A10]).

iii) → i)

F vérifiant la condition iii) et du fait que F,G,H,R sont bornées, il est clair que

$$U'\Lambda\ U < \lambda\ ||u||^2$$

d'où l'on déduit que :

$$P \leqslant P^* < \mu\ I \qquad \forall\ P \in \mathcal{P} \qquad (4\text{-}10)$$

Choisissons dans (4-4a) une matrice A(.) égale à I. Ce choix engendre dans la représentation paramétrique une matrice $P^\circ = P_* + \delta P^\circ$ telle que pour une constante positive α :

$$\delta P^\circ > \alpha I \qquad (4\text{-}11)$$

$$Q^\circ - S^\circ R^{-1} S^{\circ\prime} = [\delta P^\circ]^2 > \alpha^2 I \qquad (4\text{-}12)$$

D'après (4-10) et du fait que G et H sont bornées, il existe une constante s telle que : *

$$||S^\circ||_\infty \leq ||G||_\infty + ||P^\circ||_\infty \, ||H'||_\infty \leq s \qquad (4\text{-}13)$$

Soit alors ρ dans l'intervalle $]o, \min (r, \alpha r^2 (s^2+2\alpha^2)^{-1})[$ où $r = ||R||_\infty$; on peut affirmer que :

$$Q^\circ - S^\circ [R - \rho I]^{-1} \, S^{\circ\prime} \geqslant o \qquad (4\text{-}14)$$

en effet :

$$Q^\circ - S^\circ [R-\rho I]^{-1} S^{\circ\prime} = [Q^\circ - S^\circ R^{-1} S^{\circ\prime}] - \rho S^\circ R^{-1} [R-\rho I]^{-1} S^{\circ\prime} \qquad (4\text{-}15)$$

or $||R-\rho I||_\infty = r - \rho$ et pour le ρ choisi :

$$||\rho S^\circ R^{-1} [R-\rho I]^{-1} S^{\circ\prime}||_\infty < \alpha^2 \qquad (4\text{-}16)$$

(4-15) et (4-16) impliquent (4-14) qui équivaut à

$$\begin{bmatrix} Q^\circ & S^\circ \\ S^{\circ\prime} & R-\rho I \end{bmatrix} \geqslant o$$

P° est donc solution du problème $\{F,G,H,R-\rho I\}$ et Λ° est de type réel non négatif. Donc Λ est bien coercif.

---

* La norme $||.||_\infty$ est définie de la manière suivante :

$$||A||_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} ||A(t)||$$

Chapitre V

Calcul de $P^*(.)$ et $P_*(.)$

5-1. Matrices $P(t,\tau)$ et $Q(t,\tau)$

Nous ne traiterons ici que le cas régulier coercif. Définissons $P(t,\tau)$ pour $\tau > o$ par :

$$\xi' P(-t,\tau)\, \xi = \inf_{u \in \mathcal{E}_\tau(t,\xi)} U'\Lambda\, U_t \qquad (5\text{-}1)$$

où $\mathcal{E}_\tau(\xi,t)$ est le sous ensemble des commandes de $\mathcal{E}(t,\xi)$ qui sont de longueur τ au plus (non vide d'après l'hypothèse de totale observabilité de $(H_t F_t)$).

Pour les mêmes raisons que celles avancées au chapitre 3 pour $P^*(.)$, cette définition est cohérente et la matrice symétrique ainsi définie est unique, semi définie positive et dérivable par rapport à t.

Soient alors les matrices $Q(t,\tau)$ et $S(t,\tau)$ associées à $P(t,\tau)$ par les relations :

$$\begin{cases} -Q(t,\tau) = F(t)P(t,\tau) + P(t,\tau)F'(t) - \dfrac{\partial P}{\partial t}(t,\tau) \\ \\ S(t,\tau) = G(t) - P(t,\tau)H'(t) \end{cases} \qquad (5\text{-}2)$$

Notons d'abord que, pour toute phase (t,ξ) on peut, d'après le lemme (3-2) écrire $\xi' P(-t,\tau)\, \xi$ sous la forme :

$$\xi' P_{-t,\tau}\, \xi = \inf_{u \in \mathcal{E}_\tau(\xi,t)} \{\xi'\, P_{-t,\tau}\, \xi + \int_{-\infty}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} Q_{-\alpha,\tau} & S_{-\alpha,\tau} \\ S'_{-\alpha,\tau} & R_{-\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha d\alpha\}$$

soit :

$$\inf_{u \in \mathcal{E}_\tau(\xi,t)} \int_{-\infty}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} Q_{-\alpha,\tau} & S_{-\alpha,\tau} \\ S'_{-\alpha,\tau} & R_{-\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \, d\alpha = o \qquad (5\text{-}4)$$

x satisfaisant bien entendu la contrainte (3-8) – (3-9), ce qui n'est pas répété dans la suite.

D'autre part, toujours d'après le lemme (3-2), on a :

$$\xi' P_{-t,\tau+\Delta\tau}\, \xi = \inf_{u \in \mathcal{E}_{\tau+\Delta\tau}(t,\xi)} \{\xi' P_{-t,\tau}\, \xi + \int_{-\infty}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} Q_{-\alpha,\tau} & S_{-\alpha,\tau} \\ S'_{-\alpha,\tau} & R_{-\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha \}$$

soit :

$$\xi' \left[P_{-t,\tau+\Delta\tau} - P_{-t,\tau} \right] \xi = \inf_{u \in \mathcal{E}_{\tau+\Delta\tau}(t,\xi)} \int_{-\infty}^{t} [x'u']_\alpha \begin{bmatrix} Q_{-\alpha,\tau} & S_{-\alpha,\tau} \\ S'_{-\alpha,\tau} & R_{-\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}_\alpha d\alpha$$

Si $(t-\Delta\tau, \xi^-)$ appartient à la trajectoire optimale et de la même façon qu'on a obtenu la relation (3-16), on peut écrire (les matrices sous le signe somme ne sont pas réécrites)

$$\inf_{u \in \mathcal{E}_{\tau+\Delta\tau}(t,\xi)} \int_{-\infty}^{t} [\ ] \begin{bmatrix} \ & \ \\ \ & \ \end{bmatrix} [\ ] \, d\alpha =$$

$$\inf_{u \in \mathcal{E}_\tau(t-\Delta\tau,\xi^-)} \int_{-\infty}^{t-\Delta\tau} [\ ] \begin{bmatrix} \ & \ \\ \ & \ \end{bmatrix} [\ ] \, d\alpha \quad +$$

$$\inf_{u \in \hat{\mathcal{E}}} \int_{t-\Delta\tau}^{t} [\ ] \begin{bmatrix} \ & \ \\ \ & \ \end{bmatrix} [\ ] \, d\alpha \qquad (5\text{-}5)$$

où $\hat{\mathcal{E}}$ désigne l'ensemble des commandes de $\mathcal{U}$ transférant le système $(\bar{F}', \bar{H}')$ de la phase $(t-\Delta\tau, \xi^-)$ à la phase (t,ξ).

D'après (5-4) le premier infimum du second membre de (5-5) est nul.

D'autre part, dans l'intervalle $[t-\Delta\tau, t]$, la fonction u peut être approximée par $u(\alpha) = u_o + u_1\alpha + u_2$.

Il vient donc, dans le cas régulier :

$$\inf_{u\in\mathcal{E}_{\tau+\Delta\tau}(t,\xi)} \int_{-\infty}^{t} [\ \ ] \begin{bmatrix} \ \ \ \ \end{bmatrix} [\ \ ] d\alpha = \tag{5-5}$$

$$\Delta\tau[\xi' Q_{-t,\tau}\,\xi + u_o' R_{-t} u_o + 2\xi' S_{-t,\tau} u_o] + O(\Delta\tau^2)$$

u_o étant donnée par $u_o = - R_{-t}^{-1} S'_{-t,\tau}\,\xi$.

Donc :

$$\xi'\left[P_{-t,\tau+\Delta\tau} - P_{-t,\tau}\right]\xi = \Delta\tau\xi'[Q_{-t,\tau} - S_{-t,\tau}R_{-t}^{-1}S'_{-t,\tau}]\,\xi + O(\Delta\tau^2)\ ,$$

soit en passant à la limite et puisque ξ est quelconque :

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}(-t,\tau) = Q(-t,\tau) - S(-t,\tau)R^{-1}(-t)S'(-t,\tau) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

ou encore :

$$\frac{\partial P}{\partial\tau}(t,\tau) = Q(t,\tau) - S(t,\tau)R^{-1}(t)S'(t,\tau) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{5-6}$$

Les relations (5-2) et (5-6) donnent les dérivées partielles de $P(t,\tau)$ par rapport à t et τ. Il reste à vérifier que les dérivées croisées sont égales.

D'après (5-6), on peut écrire :

$$\frac{\partial P}{\partial\tau\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial\tau} + F\left[Q - SR^{-1}S'\right] + \left[Q - SR^{-1}S'\right] F'$$

Substituons à Q et $\frac{\partial Q}{\partial \tau}$ leurs valeurs tirées de (5-2) :

$$\frac{\partial P}{\partial \tau \partial t} = \frac{\partial P}{\partial t \partial \tau} + F\left[\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial \tau}\right] + \left[\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial \tau}\right]F' - F[FP+PF'+SR^{-1}S'] - [FP+PF'+SR^{-1}S']F' \qquad (5\text{-}7)$$

Il suffit alors de remplacer dans (5-7) $SR^{-1}S'$ par son expression $-\frac{\partial P}{\partial \tau} - FP - PF' + \frac{\partial P}{\partial t}$ tirée de (5-6) et (5-2) pour aboutir à l'identité des dérivées croisées.

On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 5-1

La matrice $P(t,\tau)$ définie en (5-1) vérifie :

$$\frac{\partial P}{\partial \tau}(t,\tau) = -F(t)P(t,\tau) - P(t,\tau)F'(t) + \frac{\partial P}{\partial t}(t,\tau) - [G(t)-P(t,\tau)H'(t)]R^{-1}(t)[G'(t)-H(t)P(t,\tau)] \qquad (5\text{-}8)$$

Soit t fixé, comme $\mathcal{E}_\tau(t,\xi) \subset \mathcal{E}(t,\xi)$, $P(t,\tau)$ est monotone non croissante quand τ croit et bornée inférieurement par $P^*(t)$. $P(t,\tau)$ admet donc une limite quand τ tend vers l'infini et cette limite ne peut être différente de $P^*(t)$ (par définition).

En revenant par ailleurs à la définition (5-1), on voit que $P(t,\tau)$ est solution maximale à l'instant t pour le problème $\{F,G,H,R\}$ restreint à un intervalle $]t-\tau, t_1[$ contenant t.

Dans ces conditions, étant donnée l'hypothèse de coercivité et de la même manière qu'en (4-1), on peut écrire pour toute phase (t,ξ) :

$$\xi' P(-t,\tau) \xi > \rho \xi' W_{t,\tau}^{-1} \xi$$

avec $W_{t,\tau} = \int_{t-\tau}^{t} \Phi'(\tau-t,-\alpha)\bar{H}'(\alpha)\bar{H}(\alpha)\Phi(\tau-t,-\alpha)\,d\alpha$

Or F et H sont bornées. En faisant tendre τ vers zéro, il vient donc :

$$\lim_{\tau \to o} ||W^{-1}_{t,\tau}|| = \lim_{\tau \to o} ||P(-t,\tau)|| = + \infty \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Comme $P(t,\tau) > P^*(t)$ est inversible, on peut définir :

$$\Omega(t,\tau) = P^{-1}(-t,\tau) \tag{5-9}$$

et il est clair que :

$$\text{i)} \quad \lim_{\tau \to \infty} \Omega(.,\tau) = P_*(.)$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{\tau \to o} \Omega(.\ \tau) = o$$

Nous avons démontré le résultat suivant

Théorème 5-2

La fonction $\Omega(.,.)$ définie par (5-9) et (5-1) est telle que

$$\text{i)} \quad \lim_{\tau \to \infty} \Omega(.,\tau) = P_*(.) \tag{5-10}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{\tau \to o} \Omega(.,\tau) = o \tag{5-11}$$

et vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}(t,\tau) = \bar{F}'(t)\Omega(t,\tau) + \Omega(t,\tau)\,\bar{F}(t,\tau) - \frac{\partial \Omega}{\partial t}(t,\tau)$$

$$+ [\bar{H}'(t) - \Omega(t,\tau)\bar{G}(t)]R^{-1}(t)[\bar{H}(t) - \bar{G}'(t)\Omega(t,\tau)] \tag{5-12}$$ ■

5-2. Corollaire (5-3)

L'intégration de (5-12) à partir des conditions initiales :

$$\Omega(.,o) = o$$
$$\Omega(t_o,.) = o$$

donne la solution minimale pour le problème $\{F,G,H,R\}$ en temps fini débutant à l'instant t_o. ■

Quand t_o tend vers $-\infty$, Ω tend vers P_*, (nous ne pouvons rien dire sur la manière de converger).

La dualité donne des résultats similaires pour la solution maximale.

Remarque

Si l'on se place dans le cas particulier stationnaire, on voit sur (5-1) que $P(t,\tau)$ et $\Omega(t,\tau)$ sont constantes en t.(5-11) et (5-12) redonnent les algorithmes trouvés par FAURRE [F10].

Chapitre VI

Applications du lemme positif réel à l'étude des systèmes dissipatifs

1 - Notions énergétiques associées aux systèmes dynamiques - rappels

Définition 6-1

Soit un système dynamique Σ et deux fonctions

$$S(t,x) : R \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad ; \quad w_t : U_t \times Y_t \longrightarrow \mathbb{R}$$

On dit que le triplet $\{\Sigma, w, S\}$ est dissipatif (ou encore que Σ est dissipatif relativement à w et S), si l'inégalité de dissipation :

$$S(t_o,x_o) + \int_{t_o}^{t_1} w_\alpha \, d\alpha \geq S(t_1,x_1)$$

est satisfaite pour tout $\{t_1 \geq t_o,\ x_o \in X_{t_o},\ u \in \mathcal{U}\}$ avec :

$w_t = w_t(u(t),\ r(\varphi(t,t_o,x_o,u)))$ et $x_1 = \varphi(t_1,t_o,x_o,u)$.

Les fonctions S et w sont appelées respectivement énergie potentielle et fonction puissance.

Remarque

Si S est différentiable, l'inégalité de dissipation est équivalente à sa forme différentielle:

$$\left[\frac{dS(t,x)}{dt}\right] \text{ le long des trajectoires de phase.} \leq w_t(u,r(x,u))$$

$$\forall (x \in X_t,\ u \in \mathcal{U})$$

Nous aurons dans la suite à utiliser les hypothèses suivantes :

$\forall S$, $\exists (\tau, x^\bullet)$ telle que :

1) $\min_{x \in X_\tau} S(\tau,x) = S(\tau,x^\bullet) = o$ (6-1)

2) X_t est totalement atteignable depuis $x^\bullet$ $\forall t > \tau$ (6-2)

(autrement dit il existe une phase où S s'annule et toute phase ultérieure est atteignable depuis elle).

Théorème et définition (6-1)

On appelle énergie disponible la fonction $S^d : R \times X \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$S^d(t,x) = \sup_{\substack{u \in \mathcal{U}, t_1 \geq t \\ (t,x)\to}} \left\{ - \int_t^{t_1} w_\alpha \, d\alpha \right\} \qquad (6\text{-}3)$$

et énergie de transfert la fonction $S^r : R \times X \to \mathbb{R}^+$ définie sous l'hypothèse (6-1) par :

$$S^r(t,x) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{U}, t_{-1} \leq t \\ (t_{-1},x^\bullet)\to(t,x)}} \left\{ - \int_{t-1}^{t} w_\alpha \, d\alpha \right\} \qquad (6\text{-}4)$$

les notations "$(t,x)\to$" et "$(t_{-1},x^\bullet)\longrightarrow(t,x)$" indiquant que l'extremum est pris le long des trajectoires de phase respectivement débutant à (t,x) et joignant $(t_{-1},x^\bullet)$ à (t,x).

Théorème 6-2 [W5]

Un système Σ est dissipatif si et seulement si l'énergie disponible est finie. De plus, dans ce cas, quelle que soit l'énergie potentielle S considérée

1 - $o \leq S^d \leq S$ et S^d constitue une énergie potentielle possible.

2 - $S \leq S^r$ et, sous l'hypothèse (6-2), S^r est finie et constitue une énergie potentielle possible.

En appelant $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions énergies potentielles possibles et si l'on remarque que $S^{\alpha} = \alpha S^1 + (1-\alpha) S^2$ satisfait l'inégalité de dissipation ($\alpha \in [0,1]$: $S^1, S^2 \in \mathcal{S}$) on peut énoncer le corollaire suivant :

Corollaire (6-3)

Pour tout système dissipatif Σ satisfaisant les hypothèses (6-1) et (6-2), $\mathcal{S}$ est un ensemble fermé convexe admettant pour maximum S^r et pour minimum S^d.

2 - Application du lemme positif réel aux systèmes dissipatifs.

Plaçons nous dans le cas particulier des systèmes Σ du type (1-13), tels que $m = p$ ("multipoles") et prenons pour fonction puissance $w_t = u'_t y_t = \frac{1}{2} (u'_t y_t + y'_t u'_t)$.

De la même manière qu'au chapitre 3 (pour P*), on démontre que S^r et S^d, extrêma de fonctionnelles quadratiques sous contrainte linéaire, sont quadratiques. D'après le théorème (6-2) un système Σ sera donc dissipatif si et seulement s'il existe S_t de la forme $S_t = 1/2\ x'_t \hat{P}_t x_t$ satisfaisant l'inégalité de dissipation.

Celle-ci prise sous sa forme différentielle s' exprime comme suit :

$$x'\widehat{P}[Fx+Gu] + [x'F'+u'G']\widehat{P}x + x'\mathring{\widehat{P}}x - u'[Hx+Ju]-[x'H'+u'J']\,u \leq o \qquad (6\text{-}5)$$

En posant :

$$-\widehat{Q} = \widehat{P}F + F'\widehat{P} + \mathring{\widehat{P}}$$
$$\widehat{R} = J + J'$$
$$\widehat{S} = H' - \widehat{P}G$$

on voit que (6-5) revient à imposer que :

$$\begin{bmatrix} \widehat{Q} & \widehat{S} \\ \widehat{S}' & \widehat{R} \end{bmatrix} \geq o$$

Autrement dit, et d'après le théorème (3-4), le système Σ est dissipatif si et seulement si la fonction $\Lambda(.,.)$ associée est de type réel non négatif.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

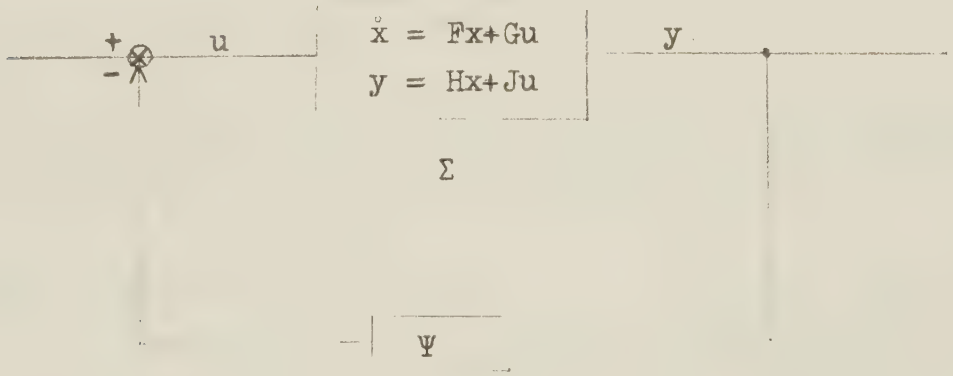
Théorème 6-4

Un système dynamique Σ est dissipatif pour la fonction puissance w : u'y si et seulement si la fonction $\Lambda(.,.)$ associée au système est de type réel non négatif.

L'ensemble des énergies potentielles quadratiques est décrit par l'ensemble $\hat{\mathcal{P}}$ des matrices $\hat{P}$ solutions de (3-15), (3-18), les maxima et minima de cet ensemble étant respectivement l'énergie de transfert et l'énergie disponible. ■

3 - Application du lemme positif réel à la stabilité des systèmes bouclés sans mémoire.

On considère une boucle $u = -\Psi(y)$ fermée sur un système dynamique Σ non stationnaire du type (1-12).
L'ensemble est schématisé par la figure suivante :



Théorème 6-4

Si la fonction $\Lambda(.,.)$ associée au système dynamique Σ est de type réel non négatif alors, pour toute entrée u(.) telle que :

$$u'_t\, y_t \leq o \qquad \forall t \qquad (6\text{-}5)$$

le système bouclé est stable.

Par hypothèse, il existe $\hat{P}$ appartenant à l'ensemble $\hat{\mathcal{P}}$ défini au théorème 3-4.

Considérons alors la fonction $V(x,t) = x'_t \hat{P}_t x_t$ c'est une fonction de Lyapunov. En effet :

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]_{\substack{\text{le long des} \\ \text{trajectoires}}} = x' \hat{P} [Fx+Gu] + [x'F'+u'G] \hat{P} + x' \mathring{\hat{P}} x$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - x' \hat{Q} x - 2 x' \hat{S} u - u' \hat{R} u + 2 y'u$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leq - x' \hat{Q} x - 2 x' \hat{S} u - u' \hat{R} u \qquad \text{d'après (6-5)}$$

soit, d'après le théorème (3-4)

$$\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right]_{\substack{\text{le long des} \\ \text{trajectoires.}}} \leq o \ .$$

Remarques

On ne suppose rien sur Ψ, qui peut être un opérateur quelconque(le cas échéant de nature stochastique). Il suffit que l'hypothèse (6-5) soit remplie.

Le théorème n'est autre que la généralisation au cas non stationnaire du célèbre théorème de POPOV [P1].

Chapitre VII

Applications du lemme positif réel au problème du filtrage

1. Lemme positif réel et réalisations markoviennes

La comparaison des expressions (2-19), (2-22) d'une part et (3-3), (3-6) d'autre part, montre l'application directe du lemme positif réel à l'étude des réalisations markoviennes d'un processus y(.). A savoir : il y a correspondance **biunivoque** entre réalisations markoviennes de y(.) et matrices P(.) associées par le lemme positif réel à la covariance $\Lambda(.,.)$ du processus.

Le lemme positif réel constitue une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de réalisations markoviennes.

Nous allons voir par ailleurs que dans un problème de filtrage linéaire, le filtre est une réalisation particulière (ce qui découle de KAILATH [K1]*), plus précisément, la réalisation markovienne associée à la solution P_* définie plus haut (ceci est fait dans FAURRE [F10] pour le cas stationnaire : la démonstration donnée ici adopte une approche différente).

2. Le problème de filtrage linéaire (cas régulier)

On observe un processus gaussien centré y(.) dont on sait qu'il se décompose sous la forme

$$y(t) = z(t) + w(t) \qquad t \geq t_o \qquad (7\text{-}1)$$

où : . w(.) est un bruit blanc (on peut le supposer centré et on désignera par R(.) sa covariance),

---

* où la notion de réalisation markovienne n'est pas abordée en tant que telle.

. z(t) est un processus centré de variance finie tel que

$$E\{w_t z'_\tau\} = o \quad \text{pour } t_o \leq \tau < t \tag{7-2}$$

(w_t est décorrelé des valeurs passées de z).

Définition 7-1

On appelle meilleure estimée linéaire dans le problème de filtrage, la variable aléatoire :

$$\hat{z}(t) = E\{z(t)/y(\sigma),\ t_o \leq \sigma \leq t\}$$

et erreur de filtrage la variable aléatoire :

$$\tilde{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$$

Le problème de filtrage consiste à calculer $\hat{z}(t)$ et le filtre désigne le processus de calcul.

Théorème 7-1 [K1], [K2]

Le processus $\nu(.)$ appelé innovation du processus $y(.)$ et défini par :

$$\nu(t) = y(t) - \hat{z}(t) = \tilde{z}(t) + w(t) \tag{7-3}$$

est un bruit blanc de même covariance que $w(.)$.

Processus et innovation sont liés par un opérateur linéaire causal et il existe $g(t,\tau)$ unique tel que

$$\hat{z}(t) = \int_{t_o}^{t} g(t,\tau)\nu(\tau)d\tau \tag{7-4}$$

avec : $E\{\tilde{z}_t\ \nu'_\tau\} = o \qquad \text{pour } \tau \leq t$

3. Filtrage des processus à réalisations markoviennes

Considérons la classe particulière des processus $y(t)$ dont la covariance $\Lambda(.,.)$ est du type réel non négatif (c'est-à-dire ceux admettant des réalisations markoviennes). On dispose au départ (déduite des observations $y(.)$) d'une représentation $\{F,G,H,R\}$ de Λ.

Le problème de filtrage que nous nous posons consiste à trouver la meilleure estimée $\hat{x}(t)$ (à partir de la représentation de Λ étant donnée). Nous l'aborderons dans le seul cas régulier ($R \cdot o$).

Théorème (7-2)

Si le processus observé $y(.)$ admet des réalisations markoviennes, alors le filtre est la réalisation markovienne associée à la solution P_*. ∎

Par abus de langage, nous dirons qu'un processus $x(.)$ solution de (2-7) et (2-8) pour la représentation de Λ donnée est une réalisation de y. Le théorème peut se démontrer en trois étapes

α) Si x est une réalisation de y, $\hat{x} = E\{x/y\}$ l'est également.

D'après le théorème (7-1), il existe $h(t,\tau)$ tel que :

$$x(t) = \int_{t_o}^{t} h(t,\tau)\ \nu(\tau)\ d\tau \qquad (7\text{-}5)$$

avec : $E\{\tilde{x}_t \nu'_\tau\} = o \qquad$ pour $\tau < t$ (7-6)

D'où :

$$E\{x_t \nu'_\tau\} = \int_{t_o}^{t} h(t,s) E\{\nu(s)\nu'(\tau)\}\, ds \qquad \tau < t \qquad (7\text{-}7)$$

et d'après le théorème (7-1) :

$$E\{x_t \nu'_\tau\} = h(t,\tau)\ R(\tau) \qquad \tau < t$$

Donc :

$$\hat{x}(t) = \int_{t_o}^{t} E\{x_t \nu'_\tau\}\ R^{-1}_\tau\ \nu_\tau\ d\tau \qquad (7\text{-}8)$$

En dérivant (7-8) par rapport à t et en désignant par T(t) la matrice :

$$T(t) = E\{x_t \nu'_t\}\ R^{-1}_t \qquad (7\text{-}9)$$

On obtient :

$$\overset{\circ}{\hat{x}}(t) = F(t)x(t) + T(t)\nu(t) \qquad (7\text{-}10)$$

qui avec (7-3) démontre le premier point.
Le gain T(t) s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T_t &= \left[E\{x_t \tilde{x}'_t\}H'_t + E\{x_t v'_t\}\ \right] R^{-1}_t \\ T_t &= \left[E\{(\hat{x}_t+\tilde{x}_t)\tilde{x}'_t\}H'_t + E\{x_t v'_t\}\right] R^{-1}_t \\ T_t &= [\Sigma H' + S]R^{-1} \end{aligned} \qquad (7\text{-}11)$$

où la variance Σ de l'erreur de filtrage $\tilde{x}$ vérifie l'équation de Riccati :

$$\overset{\circ}{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' - [\Sigma H' + S]R^{-1}[H\Sigma + S'] \qquad (7\text{-}12)$$

β) <u>Pour deux réalisations x_1 et x_2 de y les réalisations associées $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ (voir α) sont identiques</u>.

On peut écrire (7-12) pour chacun des processus x_1 et x_2 dont les variances vérifient d'autre part (cf. 2-6)

$$\overset{\circ}{P}_i = F\,P_i + P_i P' + Q_i \qquad i = 1,2$$

D'où, par soustraction et pour i = 1,2 :

$$[\overset{\circ}{\Sigma}_i - \overset{\circ}{P}_i] = F[\Sigma_i - P_i] + [\Sigma_i - P_i]F' - [\Sigma_i H' + S_i]R^{-1}[H\Sigma_i + S'_i]$$

soit, en posant $\pi_i = \Sigma_i - P_i$

$$\overset{\circ}{\pi}_i = F\pi_i + \pi_i F' - [\pi_i H' + G]R^{-1}[H\pi_i + G] \quad i = 1,2 \qquad (7\text{-}13)$$

On sait [B3], [B4] que cette équation admet une solution globale unique pour toute condition initiale (ce résultat demeure si t_o tend vers $-\infty$)

Donc $\pi_1 = \pi_2 = \pi$

et $T_i = [\Sigma_i H' + S_i] = P_i H' + S_i + \pi H' = G + \pi H'$ pour $i = 1,2$

soit $T_1 = T_2$

$\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ étant solutions de la même équation différentielle stochastique sont deux réalisations identiques de y, ce qui démontre le second point.

γ) Pour toute réalisation x de y $\hat{x} = x_*$ (de variance P_*)

En effet, $\mathrm{var}\{x/y\} \leq \mathrm{var}\{x\}$ pour toute réalisation x, et P_* est solution minimale dans $\mathcal{P}$.

4 - Conclusion

Il est maintenant bien connu que le filtre de Kalman-Bucy donne la meilleure estimée de tout processus gaussien markovien x observé au moyen d'un processus y lié à x par des relations données du type (2-7)-(2-8). On sait que sa mise en oeuvre nécessite la connaissance a priori de la covariance du bruit $\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$, dont l'estimation est souvent irréalisable dans la pratique. Des techniques telles que le filtrage adaptatif [cf. M6] permettent, il est vrai, de remédier à cet inconvénient.

L'approche que nous avons suivie est différente. Elle consiste à :

- partir d'une représentation externe (covariance) du processus observé y.
- établir le lien avec l'ensemble des représentations internes de y par modèle linéaire. Chacune de ces représentations fait intervenir un processus gaussien markovien x.

On vient de voir que pour chacun de ces processus x, le filtre est une représentation interne particulière, la même pour tous.

En fin de compte, on a obtenu le filtre optimal à partir de la seule covariance du processus observé.

Chapitre VIII

Calcul d'une représentation - Résultats numériques

1. Introduction

Les développements précédents supposent connue une représentation de $\Lambda(.,.)$ sous la forme (3-1). On se pose maintenant le problème de déterminer les éléments de cette représentation à partir des signaux observés. Plus précisément, une fois estimées* à partir de ces signaux les valeurs de $\Lambda(t,\tau)$ pour tout couple (t,τ), on cherche à séparer cette fonction sous la forme :

$$\Lambda(t,\tau) = A(t)B(\tau)1(t-\tau)+B'(t)A'(\tau)1(\tau-t)+R(t)\delta(t-\tau) \quad (8-1)$$

Le moyen d'obtenir une représentation de $\Lambda(.,.)$ à partir des matrices A,B,R est ensuite connu (se reporter par exemple à [A19]).

2. Généralités sur la méthode proposée.

Notons tout d'abord que la nécessité de mettre en oeuvre des techniques digitales conduit à travailler en discret, sur des $\Lambda(i,j)$ échantillonnés.

Pour le cas stationnaire, le premier algorithme résolvant ce problème a été introduit par B.L. HO [H1]. Il présente l'inconvénient n'étant pas récursif de mal se prêter à l'utilisation en temps réel. L'algorithme de RISSANEN [R4], [R5], [F9] répond lui à cette préoccupation. En non stationnaire peu de choses semble-t-il ont été écrites sur le sujet. Des très intéressants résultats de SILVERMAN [S6], on ne peut guère tirer de méthode vraiment applicable dans la pratique (du fait qu'il faut détecter dans une matrice fonction de (t,τ) une sous matrice de rang constant pour tout (t,τ)).

---

* On laisse de côté le problème (important) de l'estimation des $\Lambda(t,\tau)$.

Tout en étant de portée relativement générale, la méthode que nous présentons ne résoud pas le problème global, puisqu'on y recherche A et B sous la forme particulière suivante :

$$A(i) = H\, F_1^i \tag{8-2}$$

$$B(j) = F_2^j\, G \tag{8-3}$$

ce qui revient à factoriser $\Lambda(.,.)$ comme suit :

$$\Lambda(i,j) = H\, F_1^i\, F_2^j\, G \qquad \text{pour } i > j \tag{8-4}$$

Cette démarche permet d'utiliser certains résultats démontrés par ATTASI dans [A19] sur les images stationnaires. Nous en décrivons ici une mise en oeuvre pratique qui généralise celle de RISSANEN dans le cas stationnaire.

Nous ne redonnerons pas les démonstrations qui figurent dans [A19]. Nous ne rappellerons pas non plus la procédure utilisée en stationnaire, mais il pourra être intéressant de se reporter pour comparaison à [F9] dont la suite garde intentionnellement le plan. Enfin, comme dans [F9], nous traiterons seulement le cas monovariable ($m = 1$, $p = 1$).

3. Représentation algèbrique de systèmes linéaires

On peut regarder un système linéaire discret à deux indices comme défini par une application linéaire f opérant du "passé" vers le "futur", de l'espace vectoriel $\Omega = \left\{ \omega = \{\omega_{-i,-j},\ i \geq o,\ j \geq o\ ,\ \omega_{-i,-j} \in R \right\}$ des suites d'entrée vers l'espace vectoriel $\Gamma = \left\{ \gamma = \{\gamma_{kl}\},\ k > o,\ l > o,\ \gamma_{kl} \in \mathbb{R} \right\}$ des suites de sortie :

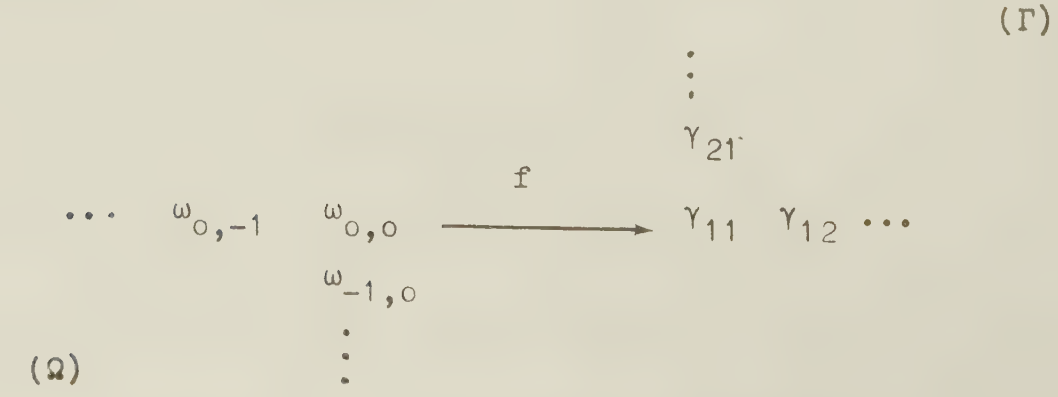


figure 8-1

Définissons dans les espaces Ω et Γ (de dimension infinie) les opérateurs suivants :

- opérateurs de décalage σ_{Ω_1}, σ_{Ω_2}, et σ_{Γ_1}, σ_{Γ_2} :

$$\sigma_{\Omega_1}[\{\omega_{-i,-j}\}] = \{\omega_{-i-1,-j}\} \text{ et } \sigma_{\Gamma_2}[\{\omega_{-i,-j}\}] = \{\omega_{-i,-j-1}\}$$

$$\sigma_{\Gamma_1}[\{\gamma_{k,l}\}] = \{\gamma_{k+1,l}\} \text{ et } \sigma_{\Gamma_2}[\{\gamma_{k,l}\}] = \{\gamma_{k,l+1}\}$$

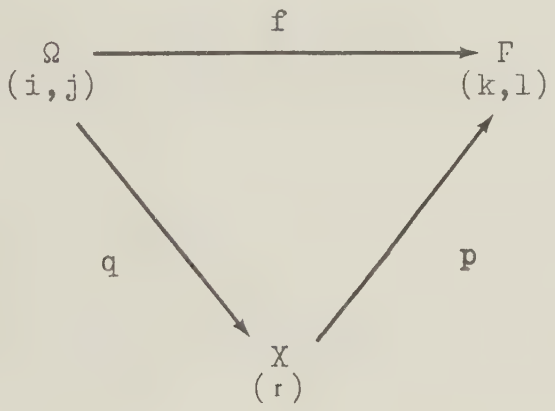
- opérateur γ_1 de projection canonique de Γ sur $\mathbb{R}$:

$$\gamma \xrightarrow{\gamma_1} \gamma_{11}$$

- opérateur γ_2 d'injection canonique de $\mathbb{R}$ dans Ω :

$$u \xrightarrow{\gamma_2} \{\{\omega_{-i,-j}\},\ \omega_{oo} = u,\ \omega_{-i-j} = o \text{ ailleurs}\}$$

L'application f sera dite factorisée à travers l'espace d'état X de dimension finie n, si et seulement si il existe un diagramme commutatif :



(8-5)

La factorisation $f = p \bullet q$ sera canonique si et seulement si q est surjective et p injective, ce qui entraîne que l'espace d'état est de dimension minimale [K8].

Les éléments $\{\sigma_{\Omega_1}^i \bullet \sigma_{\Omega_2}^j[\gamma_2(1)],\ (i,j) \in \mathbb{N}^2\}$ constituent une base $\mathcal{B}$ de Ω et leurs transformés par f : $\{\gamma_{k,l}\} = \{\Lambda_{i+k,j+l}\}$

caractérisent l'application f donnée.

Pour revenir à une représentation matricielle plus commode, on fait choix d'une bijection quelconque σ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ ont même cardinal) qui permet de représenter l'application f par la matrice symétrique $\mathcal{A}$ telle que :

$$\mathcal{A}[\sigma(i,j),\sigma(k,l)] = \Lambda(i+k,j+l)$$

Il va sans dire bien entendu que, réciproquement, la donnée d'un ensemble $\{\Lambda(i,j)\}$ ou d'une matrice $\mathcal{A}$ caractérise une application f.

Convention

Pour allèger l'écriture, on notera $\mathcal{A}_{i,j}$ la $\sigma(i,j)^{\text{ième}}$ ligne $\mathcal{A}_{\sigma(i,j)}$ de $\mathcal{A}$. Cette convention s'appliquera aussi à d'autres matrices.

Théorème 8-1

Soit donc $\{\Lambda(i,j)\}$ donnée associée à une matrice $\mathcal{A}$ rang fini. Supposons que l'application f correspondante admette une factorisation canonique p.q.

Une décomposition particulière des $\Lambda(i,j)$ sous la forme (8-4), ou F_1 et F_2 commutent et sont de dimension minimale *, sera constituée par les matrices H, F_1, F_2, G représentant respectivement dans la base $\mathcal{B}$ les applications :

$$\begin{cases} h = \gamma_1 \cdot p \\ f_1 = p^{-1} \cdot \overline{\Gamma}_{\Gamma_1} \cdot p \qquad \text{avec } p^{-1} \cdot p = I \text{ (identité dans X)} \\ f_2 = p^{-1} \cdot \overline{\Gamma}_{\Gamma_2} \cdot p \qquad (8\text{-}6) \\ g = q \cdot \gamma_2 \end{cases}$$

■

* au sens de minimalité dans une décomposition 8-4.

La démonstration de ce théorème fondamental est donnée dans [A1 9]. Indiquons simplement que l'idée est d'introduire dans des diagrammes algébriques la transition des états. L'analogie de ces résultats avec le cas stationnaire est évidente (cf.[F9]).

4. Algorithme récursif du cas monovariable.

Dans ce qui suit, nous choisirons pour bijection σ, l'application $\sigma(i,j) = (i-1)nmax + j+1$ qui numérote dans l'ordre lexicographique tous les couples (i,j), $0 \leqslant i \leqslant nmax-1$, $0 \leqslant j \leqslant nmax-1$ (étant admis a priori que $n < nmax$). On notera que ce choix particulier permet de simplifier les explications sans altérer la généralité des démonstrations.

Pour utiliser le théorème 8-1, on cherche à factoriser l'application f ou de manière équivalente, la matrice $\mathcal{A}$.

4.1. Recherche du rang de la matrice $\mathcal{A}$.

Théorème 8-2

Si pour (i,j) donné, il existe un ensemble fini $\mathcal{D}^{i,j} \subset \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\mathcal{A}_{i,j} \text{ est combinaison linéaire de } \{\mathcal{A}_{p,q}; (p,q) \in \mathcal{D}^{i,j}\} \quad (8\text{-}7)$$

alors, pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$:

$$\mathcal{A}_{i+a,j+b} \text{ est combinaison linéaire des lignes } \{\mathcal{A}_{r,s}; (r,s) \in \mathcal{D}^{i+a,j+b}\} \quad (8\text{-}8)$$

où $\mathcal{D}^{i+a,j+b}$ est le translaté de $\mathcal{D}^{i,j}$ par la translation (a,b).

Démonstration

(8-7) signifie que pour le couple (i,j) :

$$\Lambda_{i+k,j+l} = \sum_{p,q} c_{pq} \Lambda_{p+k,q+l} \qquad \forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 \quad (8\text{-}9)$$

En écrivant (8-9) pour $k = a + k'$, $l = b + l'$, $(k',l') \in \mathbb{N}^2$, on obtient (8-8).

Corollaire 8-3

Soit pour un nombre fini de couples (i,j) satisfaisant (8-7) :

$$\begin{cases} \mathcal{N}^{i,j} = \{(i+a, j+b) \ ; \ (a,b) \in \mathbb{N}^2\} \\ \text{et} \quad \mathcal{D} = \bigcup_{(i,j)} \mathcal{D}^{i,j} \\ \mathcal{N} = \bigcup_{(i,j)} \mathcal{N}^{i,j} \end{cases}$$

et supposons que :

(i) les points de $\mathcal{D}$ correspondant à des lignes indépendantes de $\mathcal{A}$. (8-10)

(ii) $\mathcal{D} \cup \mathcal{N} = \mathbb{N}^2$ (8-11)

alors le rang de f est égal au nombre n de points dans $\mathcal{D}$. ∎

En effet, les points de $\mathcal{N}$ correspondent à des lignes de $\mathcal{A}$ qui sont chacune combinaison linéaire de p autres lignes de $\mathcal{A}$ avec $p \leqslant n$. Les n lignes de $\mathcal{A}$ associées aux points de $\mathcal{D}$ constituent donc une base de $\{\mathcal{A}_{pq} \ ; \ (p,q) \in \mathbb{N}^2\}$ puisqu'en outre, elles sont indépendantes.

On déduit de ce corollaire, pour la bijection σ choisie, le critère suivant.

Critère 8-4

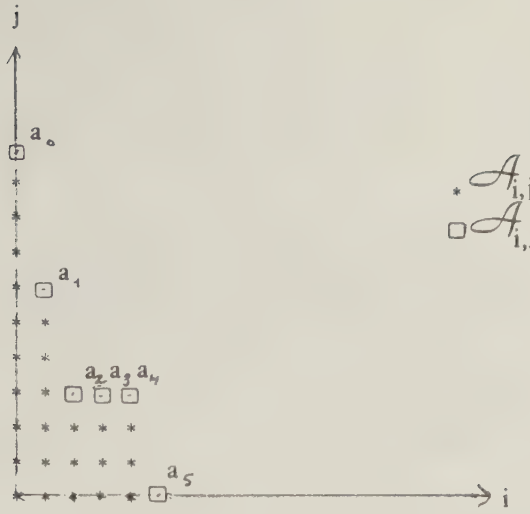
Soient :

. $\{a_i\}$ la suite décroissante des plus petits entiers tels que $\mathcal{A}_{i,a_i}$ soit la première ligne de $\mathcal{A}$ indépendante des lignes $\{\mathcal{A}_{p,q} ; \ o \leqslant p \leqslant i, \ o \leqslant q < a_p\}$ précédentes .

. i_{max} le plus petit entier i tel que $a_i = o$

Le rang de f est égal au nombre de points du domaine $\mathcal{D} = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 ; \ o \leqslant i < i_{max} \ , \ o \leqslant j < a_i\}$ soit :

$$n = \sum_{1}^{imax-1} a_j$$



. $\mathcal{A}_{i,j}$ indépendante (des précedentes).
□ $\mathcal{A}_{i,j}$ dépendante.

figure 8-3

Remarque

Ce critère rappelle celui utilisé en stationnaire où la première ligne $\mathcal{H}_a$ de la matrice de Hankel indépendantes des lignes $\{\mathcal{H}_p,\ o \leq p < a\}$ précédentes détermine l'ordre n=a du système.

4.2. Factorisation proposée

La factorisation proposée est de la forme suivante :

$$\mathcal{A} = \mathcal{P} \cdot \mathcal{Q} =$$

$$\sigma(i,j) \rightarrow \begin{matrix} \sigma_o=1 \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{matrix} \begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0 \\ \alpha\ \alpha' \\ - - - - \\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ - - - - \end{bmatrix} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \text{lignes indépendantes } \mathcal{A}_{\sigma_i} \end{bmatrix}}_{\uparrow\ \sigma(k,l)} \begin{matrix} r \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \Big\} n \qquad (8\text{-}12)$$

On cherche à rassembler dans $\mathcal{Q}$ une base de $\{\mathcal{A}_{i,j}\}$. Considérons donc, l'une après l'autre, chaque ligne $\mathcal{A}_{i,j}$ de $\mathcal{A}$. De deux choses l'une :

- ou elle est indépendante des précédentes, auquel cas elle vient figurer dans $\mathcal{Q}$ à la suite des autres. Pour retrouver $\mathcal{A}_{i,j}$ dans le produit $\mathcal{P}\cdot\mathcal{Q}$, on borde $\mathcal{P}$ par une colonne nulle et une ligne [0..01] (lignes $\sigma_1 \ldots \sigma_n$)

- ou elle ne l'est pas ($\mathcal{A}_{i,j} = (\alpha)_{i,j}\mathcal{A}_{\sigma_i}$), et dans ce cas $\mathcal{Q}$ reste inchangée. $\mathcal{A}_{i,j}$ est générée dans le produit $\mathcal{P}\cdot\mathcal{Q}$ par la ligne $(\alpha)_{i,j}$ rajoutée à $\mathcal{P}$.

Cette factorisation s'effectuera récursivement (en même temps que la détermination de n) au moyen de l'algorithme suivant :

étape o

$\mathcal{P} = 1$, $\mathcal{Q} = \mathcal{A}_{o,o}$

étape(i,j)

A ce stade, $\mathcal{Q}$ est constituée de p+1 lignes indépendantes de $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}_{\sigma_o} \ldots \mathcal{A}_{\sigma_p}$. On a pu former une matrice $\mathcal{S}$,(p+1)×(p+1), régulière :

$$\mathcal{S}(r,s) = \mathcal{A}(\sigma_r, \gamma_s) \qquad r,s = o,..p \qquad (8\text{-}13)$$

Si $(b)_{i,j} = \mathcal{A}[\ \sigma(i,j),\ \gamma_s\ ] \qquad s = o,..p \qquad (8\text{-}14)$

alors $(\alpha)_{i,j} = \mathcal{S}^{-1}(b)_{i,j}$

Comparons les vecteurs lignes $(\alpha)_{i,j}\,\mathcal{Q}$ et $\mathcal{A}_{i,j}$:

- ou bien une inégalité significative est détectée ($\mathcal{A}_{i,j}$ est indépendantes des lignes $\mathcal{A}_{\sigma_i}$ précédentes pour i = o,..p) On borde $\mathcal{P}$ par $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ et [0...1] et l'on reporte $\mathcal{A}_{i,j}$ dans $\mathcal{Q}$.

Puis on forme une nouvelle matrice $\mathcal{S}$ (par addition d'une ligne et d'une colonne) d'où l'on déduit $\mathcal{S}^{-1}$.

- ou bien on augmente $\mathcal{P}$ de la ligne $(\alpha)_{i,j}$ sans changer $\mathcal{Q}$ ni $\mathcal{S}$.

Remarque

Les matrices $\mathcal{P}$ (parce qu'elle contient toutes les lignes d'une matrice unité) et $\mathcal{Q}$ (parce qu'elle est régulière) correspondent bien à des applications respectivement injective et surjective.

4.3. Simplification de la procédure et construction de H, F_1, F_2, G.

Il faut se rappeler que la factorisation de $\mathcal{A}$ ne nous intéresse par en tant que telle, mais dans la mesure seulement où

elle permet de trouver H, F_1, F_2, G. On peut alléger considérablement les calculs en tenant compte des points suivants :

- Il est inutile de considérer les étapes (i,j) pour lesquelles i > i max, le plein rang étant déjà atteint.

- D'autre part, aucun calcul n'est à faire pour les étapes (i,j) telles que $j \geq a_{i-1}$. Ce dernier point découle du théorème ci-dessous.

Théorème 8-5

Soit $\mathcal{P}$ de la forme (8-12). Si $y = [y_{\sigma_1} \ldots y_{\sigma_2} \ldots y_{\sigma_n}]'$ est un vecteur de p(X), l'antécédent $p^{-1}(y)$ de y dans X est le vecteur :

$$x = [y_{\sigma_1}\ y_{\sigma_2} \ldots\ y_{\sigma_n}]' . \qquad \blacksquare$$

La démonstration est immédiate. Comme d'après le théorème (8-1), on compose p^{-1} à $\Gamma_i \cdot p$ (i = 1,2), il suffit de calculer les lignes $\mathcal{P}_{i,j}$ de $\mathcal{P}$ pour tous les (i,j) tels que $\mathcal{P}_{i-1,j}$ ou $\mathcal{P}_{i,j-1}$ (si elles existent) sont les lignes de matrice identité D'où le critère énoncé.

Corollaire 8-6

Les matrices H, F_1, F_2, G s'obtiennent ainsi :

1) H = première ligne de $\mathcal{P}$ = [1 0 0 0 ...]
2) G = première colonne de $\mathcal{Q}$
3) si $\mathcal{P}^1$ et $\mathcal{P}^2$ sont déduites de $\mathcal{P}$ par décalage :

$$\{\mathcal{P}^1_{i,j}\} = \{\mathcal{P}_{i-1,j}\} \quad \text{et} \quad \{\mathcal{P}^2_{i,j}\} = \{\mathcal{P}_{i,j-1}\} ,$$

les matrices F_1 et F_2 sont constituées respectivement des lignes $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ de $\mathcal{P}^1$ et $\mathcal{P}^2$. $\blacksquare$

La figure 8-4 donne l'organigramme général.

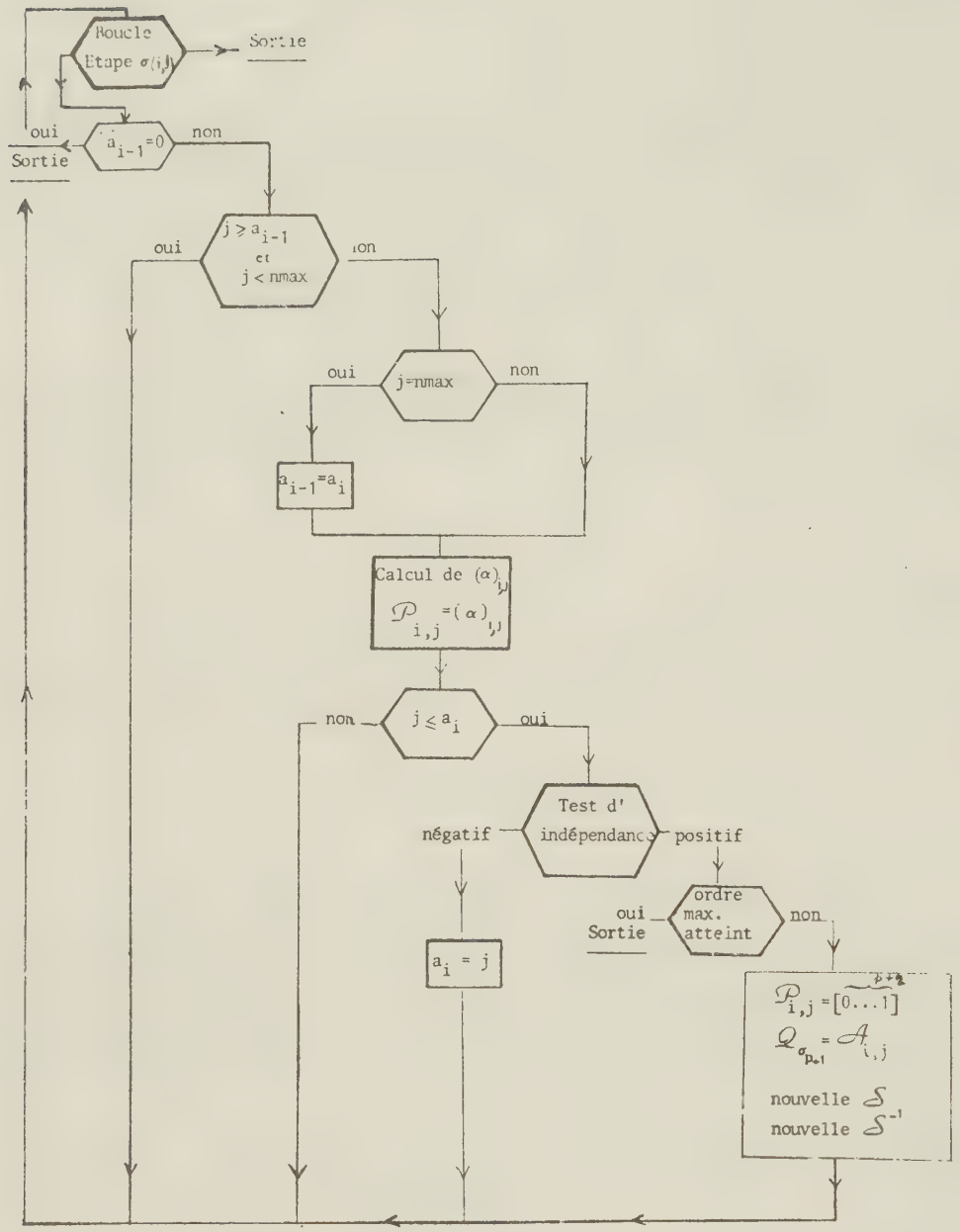


figure 8-4

4.4. Remarques-Exemples.

Le rang de la matrice $\mathcal{A}$ détermine l'ordre de la représentation. Or ce rang "théorique" est plus ou moins accessible en pratique, à cause des différentes erreurs et du fait qu'une indépendance linéaire n'est toujours apprèciée qu'à "ϵ près".

ϵ variant, on obtiendra divers ordres pour les quels la suite $\Lambda(i,j)$ de départ est plus ou moins bien approximée.

Quatre exemples sont donnés en annexe.Le premier part d'une suite $A(i,j)$ pour la quelle il est visible que la matrice $\mathcal{A}$ associée est de rang 4.On obtient effectivement,pour une valeur donnée de ϵ,une représentation "éxacte" d'ordre 4.Il se trouve qu'une valeur supèrieure de ϵ donne également une représentation éxacte,mais d'ordre 3.Ceci nous amène à souligner que le terme de minimalité du théorème (8-1) concerne uniquement des quadruplets $\{H,F_1,F_2,G\}$ où F_1 et F_2 commutent(ce qui est le cas à l'ordre 4 pour l'exemple considèré,mais pas à l'ordre 3).

Dans les exemples suivants,la suite de départ est générée par un quadruplet de matrices $\{H,F_1,F_2,G\}$ où les matrices F_1et F_2 sont diagonales et telles que la distance maximale entre valeurs propres diminue du premier au dernier éxemple.Comme on pouvait s'y attendre,l'ordre de la représentation trouvée pour un ϵ donné diminue dans le même temps.

Complément sur le cas discret

Nous n'avons considéré jusqu'ici que le cas des modèles continus ($t \in \mathbb{R}$), mais il convient de noter qu'on peut "transcrire" en discret ($t \in Z$) les développements précédents.

Ainsi les relations (3-3) à (3-6) du lemme positif réel deviennent :

$$\begin{cases} F_k P_k F'_k - P_{k+1} = - Q_k & k \in Z \quad (C\text{-}1) \\ G_k - F_k P_k H'_k = S_k & (C\text{-}2) \\ \Lambda^\circ_k - H_k P_k H'_k = R_k & (C\text{-}3) \\ \begin{bmatrix} Q_k & S_k \\ S'_k & R_k \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad P_k > 0 & (C\text{-}4) \end{cases}$$

(ces relations généralisent celles, (4-28) à (4-31, de [F10]).

Seul le lemme (4-2) relatif à la dualité demande dans le cas discret une démonstration différente que nous donnons ici.

Lemme.

Si $P(.)$ est solution du problème discret $\{F,G,H,\Lambda^\circ\}$, $\pi(.)$ est solution du problème dual $\{\bar{F}',\bar{H}',\bar{G}',\bar{\Lambda}^{\circ\prime}\}$ où $\pi(.)$ est la fonction définie pour tout k par :

$$\pi(k) = P^{-1}(-k+1) \quad \blacksquare$$

Dans un changement de base de matrice $T(.) = [\,P(.)\,]^{-1/2}$ les relations (C-1) à (C-4) deviennent ($P(.)$ est égal à I dans la nouvelle base) :

$$\begin{cases} \hat{F}_k \hat{F}'_k - I = \hat{Q}_k & (C\text{-}5) \\ \hat{G}_k - \hat{F}_k \hat{H}'_k = \hat{S}_k & (C\text{-}6) \\ \hat{\Lambda}^\circ_k - \hat{H}_k \hat{H}'_k = \hat{R}_k & (C\text{-}7) \end{cases}$$

avec $$\begin{bmatrix} \hat{Q}_k & \hat{S}_k \\ \hat{S}'_k & \hat{R}_k \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad (C\text{-}8)$$

Considérées pour chaque k dans $\mathbb{Z}$ les relations (C-5) à (C-8) signifient que chaque problème stationnaire $\{\hat{F}_k, \hat{G}_k, \hat{H}_k, \hat{\Lambda}^\circ_k\}$ admet I pour solution.

On sait alors (cf [F10]) que les problèmes stationnaires $\{\hat{F}'_k, \hat{H}'_k, \hat{G}'_k, \hat{\Lambda}^{\circ\prime}_k\}$ admettent $[I]^{-1} = I$ pour solution, ce qui peut s'écrire :

$$\begin{cases} \hat{F}'_k \hat{F}_k - I = -Q^1_k & \text{(C-9)} \\ \hat{H}'_k - \hat{F}'_k \hat{G}_k = S^1_k & \text{(C-10)} \\ \hat{\Lambda}^{\circ\prime}_k - \hat{G}'_k \hat{G}_k = R^1_k & \text{(C-11)} \end{cases}$$

avec $$\begin{bmatrix} Q^1_k & S^1_k \\ S^{1\prime}_k & R^1_k \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad \text{(C-12)}$$

En remplaçant $\hat{F}, \hat{G}, \hat{H}, \hat{\Lambda}^\circ$ par leurs valeurs en fonctions de F, G, H, Λ° dans (C-9) à (C-12), on obtient les relations du lemme positif réel qui signifient que $\pi(.)$ est solution du problème dual $\{\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{\Lambda}^\circ_k\} = \{\bar{F}', \bar{H}', \bar{G}', \bar{\Lambda}^{\circ\prime}_k\}$.

ANNEXES et BIBILIOGRAPHIE

****

- Annexe 1 : Systèmes dynamiques.
- Annexe 2 : Programme et exemples.
- Bibliographie.

Annexe 1-A. Modèle d'état d'un système dynamique Σ.

Définition A-1 [W3], [W5]

Un tel modèle est défini par les ensembles U_t, Y_t, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Y}$, X_t, T et les applications φ et r où :

i) T espace des temps est un sous ensemble ordonné de R.

ii) $\mathcal{U}$ et $\mathcal{Y}$ espaces "d'entrée" et "de sortie" sont des ensembles de fonctions $u(\cdot)$ et $y(\cdot)$ définies sur T et prenant valeurs à l'instant t dans les espaces vectoriels U_t et Y_t.

iii) X_t est l'espace d'état à l'instant t et sa dimension est la dimension du système (supposée constante).

iv) Pour t_o fixé dans T et $t \geq t_o$, φ est une application de $X_{t_o} \times \mathcal{U}$ dans X_t telle que :

a) $\varphi(t_1,t_o,x_o,u_1) = \varphi(t_1,t_o,x_o,u_2)$ si $u_1 = u_2$,

$\forall\ t_o \leq t \leq t_1$ (déterminisme).

b) $\varphi(t_o,t_o,x_o,u) = x_o$ (consistence).

c) $\varphi(t_2,t_o,x_o,u) = \varphi(t_2,t_1,\varphi(t_1,t_o,x_o,u),u)$ (propriété de groupe).

φ fournit l'état à un instant donné en fonction de l'entrée et des conditions initiales.

vi) l'application r de $X_t \times U_t$ dans Y_t donne la sortie en fonction de l'état et de l'entrée. $r_t(\varphi(t,t_o,x_o,u),u(t))$ définie pour $t \geq t_o$ est la restriction à (t_o,∞) d'un élément de $\mathcal{Y}$.

Nous ne considérons que des systèmes dynamiques réguliers, pour lesquels φ et r sont continues pour $t \geq t_o$.

Annexe 1-B. Notions concernant l'influence entrée-état ou état-sortie - Définitions.

1 - L'état x est dit atteignable au temps t (on dit aussi la phase (x,t) est atteignable) si :

$$\exists\ t_{-1} \leq t,\ \exists\ u_{-1} \text{ tels que } x = \varphi(t,t_{-1},o,u_{-1})$$

L'état x est dit commandable au temps t si :

$$\exists\ t_1 \geq t,\ \exists\ u_1 \text{ tels que } \varphi(t_1,t,x,u_1) = o$$

On obtient les notions complémentaires dites respectivement d'atteignabilité ou commandabilité :

- en temps fini, en imposant que t_1 ou t_{-1} soit fini.
- en temps donné en imposant que $t - t_{-1}$ ou $t_1 - t$ soit donné.
- différentielle (on dit aussi totale) en imposant que $|t - t_{-1}|$ ou $|t-t_{-1}|$ soit arbitrairement petit.
- uniforme, en imposant l'existence d'une fonction α continue, telle que :

$$\int_{\min(t,t_i)}^{\max(t,t_i)} ||u_i^2||\, d\sigma \leq \alpha(||x||) \qquad i = 1, -1$$

L'état x_1 est dit connecté à x_2 si :

$$\exists\ t_1 \leq t_2\ ,\quad \exists\ u \text{ tels que } x_2 = \varphi(t_2,t_1,x_1,u)$$

2 - L'état x est dit observable à t et reconstructible à t si respectivement:

- l'ensemble $\{y(\sigma)\ ,\sigma \geq t\}$ correspondant à $\{u(\sigma) = o, \sigma \geq t\}$ détermine x de façon unique.
- l'ensemble $\{y(\sigma)\ ,\sigma \leq t\}$ correspondant à $\{u(\sigma) = o, \sigma \leq t\}$ détermine x de façon unique.

On peut de la même manière que ci dessus définir les notions d'observabilité-reconstructibilité en temps fini ou différentielle ,ainsi qu'une notion d'observabilité uniforme :

$$\exists\ t_1 > t \quad \exists\ \beta : R \longrightarrow R \text{ monotone croissante avec } \beta(o) = o \text{ telle que :}$$

$$\int_t^{t_1} ||y(\sigma;\varphi(\sigma,t,x,o),o)||^2 d\sigma \leq \beta\ ||x||$$

et de reconstructibilité uniforme :

$$\exists\ t\text{-}1 < t\ ,\quad \exists\ \beta : R \to R \text{ monotone décroissante avec } \beta(o) = o \text{ telle que :}$$

$$\int_{t-1}^{t} ||y(\sigma,\varphi(\sigma,t\text{-}1,x,o),o)||^2 d\sigma \leq \beta(||\varphi(t,t\text{-}1,x,o)||$$

3 - Un espace d'état sera dit complètement commandable, observable etc..., si toute phase (x,t) a la propriété correspondante (si ce n'est vrai qu'à un instant t particulier, on précisera "complètement commandable à l'instant t"). Dans le cas de propriété uniforme les fonctions α et β définies ci-dessus doivent être communes à toutes les phases.

Annexe 1-C Propriétés de commandabilité observabilité pour une réalisation [F,G,H] de système dynamique.

Les théorèmes qui suivent permettent d'obtenir en termes de réalisations des critères algébriques de commandabilité-observabilité. Avant de les énoncer, nous introduirons les matrices et scalaires suivants :

Définition C-1.

A toute réalisation donnée, on peut associer les matrices :

$$\begin{cases} W(t\,;\,t_1\,,\,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t,\tau)G(\tau)G'(\tau)\Phi'(t,\tau)\,d\tau \\ M(t\,;\,t_1\,,\,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi'(\tau,t)H'(\tau)H(\tau)\Phi(\tau,t)\,d\tau \\ G(t\,;\,t_1\,,\,t_2) = M(t\,;\,t_1\,,\,t_2)\,W(t\,;\,t_1\,,\,t_2) \end{cases}$$

et
$$\mathcal{C}_k(t) = [G\ (\Delta G)\ \ldots\ (\Delta^{k-1}G)]_t$$
$$\mathcal{O}_k(t) = [H'(\delta H)'\ \ldots\ (\delta^{k-1}H)']_t$$
$$\Gamma_{i,j}(t) = \mathcal{O}_i(t)\,\mathcal{C}_j(t)$$

où : δ et Δ désignent les opérateurs définis par :

$$(\Delta G) = \frac{dG}{dt} - FG \quad \text{et} \quad (\delta H) = \frac{dH}{dt} + HF$$

D'autre part, les matrices $W(t\,;\,t\,,\,t_1)$ et $M(t\,;\,t\,,\,t_1)$ sont symétriques, semi définies positives, de rang monotone non décroissant avec t_1 (et borné par n). Il existe donc un intervalle [a,b] sur lequel $W(a\,;\,a\,,b)$ et $M(a\,;\,a\,,\,b)$ atteignent leur rang maximum r_c et r_o. On appellera r le rang de $G(a;a,b)$. $(r \leqslant \min(r_o,r_c) \leqslant \max(r_o,r_c) \leqslant n)$

Remarque :

Les matrices $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{O}_k$ ne sont définies qu'à la condition que F(.), G(.), H(.) soient respectivement k-2,k-1,k-1 fois différentiables par morceaux, hypothèse supposée acquise chaque fois qu'on utilisera ces matrices.

Théorème C-1 [K6], [KB], [W3].

(x,t) atteignable $\iff \exists\, t_{-1} < t$ t.q $x \in \mathcal{I}m\ W(t\,;\,t_{-1}\,,\,t)$

(x,t) commandable $\iff \exists\, t_1 > t$ t.q $x \in \mathcal{I}m\ W(t\,;\,t\,,\,t_1)$

(x,t) non reconstructible $\iff \forall\, t_{-1} < t$, $x \in \mathrm{Ker}\ M(t\,,\,t_{-1}\,,\,t)$

(x,t) non observable $\iff \forall\, t_1 > t$, $x \in \mathrm{Ker}\ M(t\,;\,t\,,\,t_1)$

Corollaire C-2

Σ complètement atteignable à $t \iff \exists\, t_{-1} < t$ t.q $rg[W(t_{-1};\,t_{-1}\,,\,t)] = n$

Σ complètement commandable à $t \iff \exists\, t_1 > t$ t.q $rg[W(t\,;\,t\,,\,t_1)] = n$

Σ complètement reconstructible à $t \iff \exists\, t_{-1} < t$ t.q $rg[M(t_{-1};\,t_{-1}\,,\,t)] = n$

Σ complètement observable à $t \iff \exists\, t_1 > t$ t.q $rg[M(t\,;\,t\,,\,t_1)] = n$

Σ uniformément commandable $\iff \forall\, t,\ \exists\, t_1 > t,\ \exists\, \varepsilon_1 > o$ t.q $\varepsilon_1 I < W(t\,;\,t\,,\,t_1)$

Σ uniformément observable $\iff \forall\, t,\ \exists\, t_1 > t,\ \exists\, \varepsilon_2 > o$ t.q $\varepsilon_2 I < M(t\,;\,t\,,\,t_1)$

Théorème C-3 [S1], [S8].

1) Une condition suffisante de complète commandabilité à l'instant t pour Σ est qu'il existe $t_1 > t$ tel que
$$rg[\mathcal{C}_n(t_1)] = n$$

2) Cette condition est nécessaire si F(.) et G(.) sont analytiques.

3) Σ est totalement commandable sur $[t_1\ t_2]$ si et seulement si :
$$rg[\mathcal{C}_n(.)] = n \quad \text{presque partout sur } [t_1,t_2]$$

4) Σ est uniformément commandable sur $[t_1,t_2]$ si et seulement si :
$$rg[\mathcal{C}_n(\tau)] = n \qquad \forall \tau \in [t_1,t_2]$$

Les critères correspondants existent avec la matrice $\mathcal{O}$ pour les notions d'observabilité.

Définition C-2

On dit qu'un triplet [F,G,H] est de rang constant (q_o, q_c) s'il existe $(k,l) \subset \mathbb{N}^2$ tel que pour tout t :

. $rg[\mathcal{C}_k] = rg[\mathcal{C}_{k+1}] = q_c$

. $rg[\mathcal{O}_l] = rg[\mathcal{O}_{l+1}] = q_o$

On appellera indice de commandabilité α et indice d'observabilité β les plus petits entiers k et l pour lesquels ces relations sont satisfaites. (α et β peuvent être supérieurs à n)

Théorème C-4 [K6].

$\{F,G,H\}^n$ est minimal, en tant que représentation de sa fonction de pondération $\mathcal{K}(.,.)$ si et seulement si $r = n$. De plus, si $r < n$, la dimension des réalisations minimales de $\mathcal{K}(.,.)$ est r. ■

Il n'est pas vrai, en général qu'un triplet $\{F,G,H\}^n$ commandable et observable soit minimal en tant que réalisation d'un système Σ.(alors qu'il l'est comme représentation de sa fonction de pondération).

Un triplet $\{F,G,H\}$de rang constant possède cependant cette propriété, ainsi qu'un certain nombre d'autres, que nous résumerons dans le théorème suivant :

Théorème C-5 [S6].

Soit $\{F,G,H\}^n$ réalisation de rang constant d'un système Σ ; alors

i) $\forall\{(k,l) ; k > \alpha, l > \beta\}$, $rg[\mathcal{C}_k] = q_c$ et $rg[\mathcal{O}_l] = q_o$

ii) $rg[\Gamma_{\beta\alpha}(.)]$ est une constante q $(q \leq \min(q_c,q_o) \leq \max(q_c,q_o) \leq n)$

iii) $(F,G,H)^n$ est commandable (resp. observable) si et seulement si $q_c = n$ (resp. $q_o = n$)

iv) $\{F,G,H\}$ est minimale(simultanément comme réalisation de Σ et représentation de $\mathcal{K}(.,.)$) si et seulement si $q = n$.

Annexe 1-D Transformations et relations d'équivalence dans un ensemble de réalisations.

Soit un système dynamique Σ. Désignons par $\mathcal{K}$ l'ensemble des réalisations de Σ. D'autre part, si $\mathcal{K}(.,.)$ est une fonction de pondération pour Σ, on notera $\mathcal{K}_k^n$ l'ensemble des représentations de $\mathcal{K}(.,.)$ ayant une dimension n donnée.

Définition D-1

Dans le groupe T_a des transformations algébriques :

$$T_a = \{\theta ; \theta[\{F,G,H\}] = \{(TF\dot{T})T^{-1}, TG, HT^{-1}\}, \det T > 0\},$$

on définit les sous-ensembles suivants (ayant également une structure de groupe) :

- groupe T_p des transformations topologiques :
$$T_p = \{\theta \in T_a ; ||T|| < k_1, ||T^{-1}|| < k_2\}$$
- groupe T_c des transformations de Lyapunov :
$$T_1 = \{\theta \in T_p ; ||\dot{T}|| < k_3\}$$
- groupe T_s des transformations strictes :
$$T_s = \{\theta \in T_1 ; T(\ ) \text{ constante}\}$$
- groupe T_{ep} des transformations de Lyapunov périodiques :
$$T_{ep} = \{\theta \in T_1 ; T(t+c) = T(t), c \text{ constante}\}.$$

Définition D-2 [A2]

Un sous-ensemble $\mathcal{R}_o$ de $\mathcal{R}$ sera dit fermé pour le groupe T_o si :

$$\forall \{F,G,H\} \in \mathcal{R}_o, \quad \forall \theta \in T_o, \quad \theta[\{F,G,H\}] \in \mathcal{R}_o$$

On appellera groupe maximal $T_M \in \mathcal{K}$ l'union des groupes T pour lesquels $\mathcal{R}_o$ est fermé . T_M représente le groupe des transformations qui conservent une propreté caractéristique de $\mathcal{R}_o$ (ou son contraire).

Théorème D-1 [Y2].

Sur [a,b], $\mathcal{R}_k^r$ est classe d'équivalence pour l'équivalence algébrique.* De plus dans $\mathcal{K}_k^n$ existe une réalisation canonique $\{0,\theta,\Psi\}^n$ avec : $\theta' = (\theta'_1\ \theta'_2\ 0\ 0)$ et $\Psi = (\Psi_1\ 0\ \Psi_3\ 0)$

où : . $(0,\theta_1,\Psi_1)^r$ est représentation de $\mathcal{K}(.,.)$ commandable et observable sur [a,b].

. $(0,\theta_2,0)^{r_c-r}$ est commandable sur [a, b].

. $(0,0,\Psi_3)^{r_o-r}$ est observable sur [a,b].

les constantes a,b,r,r_o,r_c ayant la même signification qu'en annexe C.

Théorème D-2 [M1].

Le sous-ensemble des représentations dans $\mathcal{K}_k^r$ respectivement (F,G) semi stationnaire, (H,F) semi-stationnaire, stationnaire est classe d'équivalence pour l'équivalence stricte (sous réserve d'existence).

Théorème D-3 [S5].

Le sous ensemble des représentations dans $\mathcal{K}_k^r$ qui sont uniformes est classe d'équivalence pour l'équivalence de lyapunov (sous réserve d'existence).

Théorème D-4 [A2].

Le groupe T_M correspondant aux sous ensembles des représentations dans $\mathcal{K}_k^r$ qui sont respectivement stables, asymptotiquement stables, ou uniformément stables est T_p (sous réserve d'existence).

---

* Il n'en est pas de même, en général, pour les représentations de $\mathcal{K}(.,.)$.

Théorème D-5 [A2].

Le sous ensemble des représentations dans $\mathcal{R}_k^r$ qui sont périodiques est classe d'équivalence pour l'équivalence associée à T_{ep} (sous réserve d'existence).

Théorème D-6 (sur les réalisations de rang constant) [S1], [S6].

Le sous ensemble des réalisations d'un système Σ qui sont de rang constant est classe d'équivalence pour l'équivalence algébrique, les indices α et β et les matrices $\Gamma_{\beta,\alpha+1}$ et $\Gamma_{\beta+1,\alpha}$ étant des invariants du sous ensemble.

D'autre part, dans cette classe existe une première réalisation "canonique" $\{0,G,H\}$ de rang constant, avec $G' = [G'_1, G'_2\ 0\ 0]$, $H = [H_1\ 0\ H_3\ 0]$ où :

$$\begin{cases} \{0,\ G_1,\ H_1\}^{q} & \text{est de rang constant } (q,q) \\ \{0,\ G_2,\ 0\}^{q_c-q} & \text{est de rang constant } (q_c-q,\ 0) \\ \{0,\ 0,\ H_3\}^{q_0-q} & \text{est de rang constant } (0,\ q_0-q) \end{cases}$$

et une seconde $\{\tilde{F},\ \tilde{G},\ \tilde{H}\}$; avec

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{H} = [H_1,\ 0,\ H_3]$$

où $\{F_{11},\ G_1,\ H_1\}^{q}$ est une réalisation commandable et observable (i.e minimale) et de rang constant.

Remarque

De la propriété d'invariance de $\Gamma_{\beta,\alpha+1}$ (ou $\Gamma_{\beta+1,\alpha}$) on déduit un critère permettant de savoir si un système admet une réalisation de rang constant, stationnaire ou périodique, à savoir que $\Gamma_{\beta,\alpha+1}$ (ou $\Gamma_{\beta+1,\alpha}$) possède la propriété considérée.

ANNEXE 2-A. Programme.

LISTING DU PROGRAMME.

```
FTRAN LS,G0                                                          AE-I
  1:        COMMON H(5),G(5),F1(5,5),F2(5,5),A(11,11),S(5,5),SI(5,5),NMA2
  2:        INTEGER BNDIC(6)
  3:        DIMENSION P(36,11),INDIC(5)
  4:        NMAX=6
  5: C                    PARTIE I
  6: C                    --------
  7: C NMA=NMAX-1 EST LA DIMENSION FINALE MAX POSSIBLE.POUR LA MODIFIER CHANGER LES
  8: C CARTES NMAX=,DIMENSION ,COMMON ET INTEGER(PROG.ET S.PROG.)
  9: C NEX=NB. D'EXEMPLES TRAITES.IORDR=DIMENSION POUR CHACUN.
 10:   110 FORMAT(5F10.5)
 11:        NMA=NMAX-1
 12:        NMA1=2*NMA
 13:        NMA2=2*NMA+1
 14:        NMAXC=NMAX*NMAX
 15:        READ 500 ,NEX
 16:   500 FORMAT(I2)
 17:        DO 1000 III=1,NEX
 18:        PRINT 800,III
 19:   800 FORMAT(1H1,40X,11HEXEMPLE NO ,I2,//,39X,15(1H*),///)
 20:        PRINT 802
 21:   802 FORMAT(///,40X,9HI-DONNEES,//,40X,9(1H-),///)
 22: C LECTURE ET IMPRESSION DES DONNEES.SI IORDR=0,DONNEE DIRECTE DES A(I,J).
 23:        READ 500,IORDR
 24:        IF(IORDR)3,2,2
 25:     2  READ 500,NA
 26:        DO 201 J=1,NMA2
 27:        DO 201 I=1,NMA2
 28:   201  A(I,J)=0.
 29:        READ 110,((A(I,J),J=1,NA),I=1,NA)
 30:        PRINT 301
 31:   301  FORMAT(//10X,21HSUITE A(I,J) INITIALE//)
 32:        PRINT 300,((A(I,J),J=1,11),I=1,11)
 33:   300  FORMAT(1X,11E10.3)
 34:        GO TO 21
 35:     3  READ 110,(H(I),I=1,IORDR)
 36:        READ 110,(G(I),I=1,IORDR)
 37:        READ 110,((F1(I,J),J=1,IORDR),I=1,IORDR)
 38:        READ 110,((F2(I,J),J=1,IORDR),I=1,IORDR)
 39: C CALCUL DES A(I,J) 'NON BRUITES' A PARTIR DES PARAMETRES LUS.
 40:        CALL CALA(IORDR)
 41: C 'BRUITAGE' EVENTUEL DE CES A(I,J).DISTRIBUTION NORMALE,MOYENNE MU,ECART SIGMA.
 42:        SIGMA=0.
 43:        IF(SIGMA)7,8,7
 44:     7  IG=0
 45:        IRN1=2*(2**34-2)+1
 46:        IALFA=2**19+3
 47:        MU=0.
 48:        DO 4 I=1,NMA
 49:        DO 4 J=1,NMA2
 50:        CALL RANDOM(SIGMA,MU,IG,IALFA,IRN1,SN1,SN)
 51:        I1=2*I
 52:        I2=I1-1
 53:        A(I1,J)=A(I1,J)+SN
 54:     4  A(I2,J)=A(I2,J)+SN1

 55: C IMPRESSIONS.
 56:     8  CALL IMPRES(IORDR)
 57:    21  PRINT 804
 58:   804  FORMAT(///,37X,12HII-RESULTATS,//,37X,12(1H-),///)
```

```
C                    PARTIE II
C                    ---------
C INITIALISATIONS,EPS=PRECISION POUR APPRECIER UNE INDEPENDANCE LINEAIRE.
      MIORC=0
      ITI=1
C BALAYAGE SUR EPSILON
      DO 1000 IEPS=1,61
      EPS=EXP(ALOG(1.E-06)*(61.-FLOAT(IEPS))/60.)
      DO 23  I=1,NMAX
   23 INDIC(I)=0
      DO 24 I=1,NMA2
      DO 24 J=1,NMAX0
   24 P(J,I)=0.
C TRAITEMENT ETAPE 1.
      ICHOC=1
      P(1,1)=1.
      S(1,1)=A(1,1)
      INDIC(1)=1
      SI(1,1)=1./A(1,1)
      IORDR=1
      INDIC(1)=1
      G(1)=A(1,1)
      IAIM1=NMAX0
      IAI=NMAX0
C TRAITEMENT ETAPE II.
      DO 900 II=2,NMAX0
      CALL SIGINV(II,II,I,J,I,J,NMAX)
      IF(IAIM1.EQ.1) GO TO 65
      IF((IAIM1.LT.J).AND.(J.LT.NMAX))GO TO 900
      IF(J.EQ.NMAX),AIM1,IAI
C CALCUL DE (ALPHA)(I,J),
   25 DO 28 L=1,IORDR
      DO 28 K=1,IORDR
      CALL CASE(II,INDIC(K),RES)
   28 P(II,L)=P(II,L)+RES*SI(K,L)
      IF(IAI-J)900,30,30
C TEST D'INDEPENDANCE,
   30 DO 40 L=1,NMAX0
      CALL CASE(II,L,RES)
      TEMP=-RES
      DO 42 M=1,IORDR
      CALL CASE(INDIC(M),L,RES)
   42 TEMP=TEMP+P(II,M)*RES
      IF(ABS(TEMP)-EPS)40,60,60
   40 CONTINUE
C TRAITEMENT CAS DEPENDANT,
      IAI=J
      GO TO 900
C TRAITEMENT CAS INDEPENDANT,
   60 IF(NMA-IORDR)648,648,602
  602 IORDR=IORDR+1
      INDIC(IORDR)=II
      DO 61 L=1,IORDR
   61 P(II,L)=0.
      CALL SIGINV(II,II,I1,I2,I1,I2,NMAX)
      G(IORDR)=A(I1,I2)
      P(II,IORDR)=1.
      IG=IORDR-1
      DO 64 K=1,IG
      CALL CASE(II,INDIC(K),RES)
   64 S(IORDR,K)=RES
      CALL CHOIX(INDIC,INDIC,IORDR,EPS)
      CALL INVERT(S,SI,IORDR,ICHOC,RES)
      IF(ICHOC)648,648,900
  900 CONTINUE
      ITI=1
      GO TO 65
```

```
C                    PARTIE III
C                    ----------
C TESTS POUR IMPRESSION,
  648 ITI=ITI-1
      IF(ITI)1000,649,65
  649 PRINT 815,EPS
  815 FORMAT(55H DIMENSION EXCESSIVE OU PIVOT TROP PETIT POUR EPSILON =
     *,E10.3)
      GO TO 1000
   65 IF(MIORDR-IORDR)660,1000,660
  660 MIORDR=IORDR
C CALCUL DE H,F1,F2,G,
      DO 66 I=1,IORDR
      I1=INDIC(I)+NMAX
      I2=INDIC(I)+1
      DO 68 J=1,IORDR
      F1(I,J)=P(I1,J)
   68 F2(I,J)=P(I2,J)
   66 H(I)=P(1,I)
C CALCUL DE LA SUITE A(I,J) FINALE.DISTANCE AVEC LA SUITE INITIALE,
      DO 90 I=1,NMA2
      DO 90 J=1,NMA2
   90 P(I,J)=A(I,J)
      CALL CALA(IORDR)
      ZMAX=0.
      DO 94 I=1,NMA2
      DO 94 J=1,NMA2
      P(I,J)=P(I,J)-A(I,J)
      IF(ABS(P(I,J))-ZMAX)94,94,93
   93 ZMAX=ABS(P(I,J))
   94 CONTINUE
      PRINT 812,EPS
  812 FORMAT(//,21H A PARTIR DE EPSILON=,E10.3,42H ,L'ALGORITHME DONNE P
     *OUR REPRESENTATION =)
      PRINT 813,ZMAX
  813 FORMAT(3X,27H (PRECISION SUR LES A(I,J)=,E10.3,2H )/)
      CALL IMPRES(IORDR)
      PRINT 814
  814 FORMAT(/,55(2H--),/)
 1000 CONTINUE
      STOP
```

REMARQUES.

_ Une indépendance linéaire est apprèciée à EPS près.On effectue sur EPS un balayage logarithmique.Au fur et à mesure que EPS grandit,l'algorithme donne des représentations d'ordre décroissant approximant la suite A(i,j) initiale.

_ Rôle des différents sous-programmes :

Sous-programme CALA :calcul de la suite A(i,j) générée par un quadruplet H,F_1,F_2,G.

Sous-programme CASE :sélection de A(i+k,j+1).Résultat dans RES.

Sous-programme CHOICO : choix d'un noveau vecteur colonne de $\mathcal{S}$. Le vecteur choisi fait un angle maximum avec le sous espace des vecteurs colonnes précédents (utilisation des déterminants de GRAM). INDIC et ONDIC contiennent les nombres σ_i et γ_j (avec $\mathcal{S}(i,j)=\mathcal{A}(\sigma_i,\gamma_j)$).

Sous-programme IMPRES : impression des resultats.

Sous programme INVERT : inversion de matrice et calcul de déterminant.

Sous programme RANDOM : "bruitage" initial d'une suite A(i,j).

Sous programme SIGINV : calcul de $(i,j)=\bar{\sigma}^1(II)$.

LISTING DES SOUS-PROGRAMMES

```
      SUBROUTINE IMPRES(IORDR)
      COMMON H(5),G(5),F1(5,5),F2(5,5),A(11,11),S(5,5),SI(5,5),NMA2
      PRINT 201
  201 FORMAT(10X,9HMATRICE H///)
      PRINT 202,( H(I),I=1,IORDR)
  202 FORMAT(1X,10(1X,E11.5)/)
      PRINT 203
  203 FORMAT(///,10X,9HMATRICE G///)
      PRINT 204,( G(I),I=1,IORDR)
  204 FORMAT(1X,E11.5)
      PRINT 205
  205 FORMAT(///,10X,10HMATRICE F1///)
      DO 70 I=1,IORDR
   70 PRINT 202,( F1(I,J),J=1,IORDR)
      PRINT 206
  206 FORMAT(///,10X,10HMATRICE F2///)
      DO 72 I=1,IORDR
   72 PRINT 202,( F2(I,J),J=1,IORDR)
      PRINT 302
  302 FORMAT(///10X,37HSUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES///)
      PRINT 300,((A(I,J),J=1,11),I=1,11)
  300 FORMAT(1X,11E10.3)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE CALA(NM)
      COMMON H(5),G(5),F1(5,5),F2(5,5),A(11,11),S(5,5),SI(5,5),NMA2
      DIMENSION T1(11,5),T2(5,11)
C     *CALCUL DES A*
      DO 6 I=1,NM
    6 T2(I,1)=G(I)
      DO 8 J=2,NMA2
      DO 8 I=1,NM
      T2(I,J)=0.
      DO 8 K=1,NM
      J1=J-1
    8 T2(I,J)=T2(I,J)+F2(I,K)*T2(K,J1)
      DO 12 I=1,NM
   12 T1(1,I)=H(I)
      DO 16 I=2,NMA2
      DO 16 J=1,NM
      T1(I,J)=0.
      DO 16 K=1,NM
      I1=I-1
   16 T1(I,J)=T1(I,J)+T1(I1,K)*F1(K,J)
      DO 20 I=1,NMA2
      DO 20 J=1,NMA2
      A(I,J)=0.
      DO 20 K=1,NM
   20 A(I,J)=A(I,J)+T1(I,K)*T2(K,J)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE RANDOM(SIGMA,MU,G,ALFA,RN1,SN,SN1)
      INTEGER ALFA,G,RN1,RN
      REAL MU
    1 RN=RN1*ALFA
      RSTN=FLOAT(RN)
      RSTN=RSTN*2.0**(-35)
      IF(G-1)7,6,7
    7 G=G-1
      RN1=RN
      RSTN1=RSTN
      GO TO 1
    6 Z=SQRT(-2.0*ALOG(ABS(RSTN1)))*SIGMA
      SN1=Z*COS(6.28318*RSTN)+MU
      SN=Z*SIN(6.28318*RSTN)+MU
      G=0
      RN1=RN
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CHOICH(INDIC,NBIC,IMRDR,EPS)
      COMMON H(5),G(5),F1(5,5),F2(5,5),A(11,11),S(5,5),SI(5,5),NMA2
      DIMENSION INDIC(6),GRAM(5,5)
      INTEGER NBIC(6)
      REAL MBD
      NMAXC=(NMA2+1)*(NMA2+1)/4
      IG=IORDR-1
      ANGLMA=0.
      DO 103 I=1,IORDR
      DO 103 J=1,IORDR
  103 GRAM(I,J)=0
      ICBLBP=0
      DO 102 I=1,IG
      DO 102 J=1,IG
      DO 102 K=1,IORDR
  102 GRAM(I,J)=GRAM(I,J)+S(K,I)*S(K,J)
      CALL INVERT(GRAM,SI,IG,LM,DET1)
      DO 100 K=2,NMAXC
      DO 99 I=1,IG
      IF(K-NBIC(I))99,100,99
   99 CONTINUE
      MBD=0.
      DO 95 I=1,IMRDR
      CALL CASE(INDIC(I),K,RES)
      MBD=MBD+RES*RES
   95 S(I,IORDR)=RES
      IF(MBD.LT.EPS*EPS)GO TO 100
      DO 93 I=1,IORDR
   93 GRAM(I,IORDR)=0.
      DO 90 I=1,IORDR
      DO 90 J=1,IORDR
      GRAM(I,IORDR)=GRAM(I,IORDR)+S(J,I)*S(J,IORDR)
   90 GRAM(IORDR,I)=GRAM(I,IORDR)
      CALL INVERT(GRAM,SI,IORDR,LM,DET2)
      ANGLE=DET2/(DET1*MBD)
      IF(ANGLMA-ANGLE)85,100,100
   85 ANGLMA=ANGLE
      ICBLBP=K
  100 CONTINUE
      DO 80 J=1,IG
      IF(ICBLBP-NBIC(J))75,75,80
   80 CONTINUE
      NBIC(IORDR)=ICBLBP
      GO TO 69
   75 LI=IORDR-J
      DO 72 L=1,LI
      LM=IORDR-L+1
   72 NBIC(LM)=NBIC(LM-1)
   71 NBIC(J)=ICBLBP
   69 DO 70 I=1,IORDR
      DO 70 J=1,IORDR
   70 CALL CASE(INDIC(I),NBIC(J),S(I,J))
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CASE(I,J,RES)
      COMMON H(5),G(5),F1(5,5),F2(5,5),A(11,11),S(5,5),SI(5,5),NMA2
      NMAX=(NMA2+1)/2
      CALL SIGINV(I,J,LI,LJ,LL,LM,NMAX)
      I1=LI+LL-1
      I2=LJ+LM-1
      RES=A(I1,I2)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SIGINV(I,J,K,L,M,N,NMAX)
      K=((I-1)/NMAX)+1
      L=I-(K-1)*NMAX
      M=((J-1)/NMAX)+1
      N=J-(M-1)*NMAX
      RETURN
      END
```

Annexe 2-B.

EXEMPLE NO 1

I-DONNEES

SUITE A(I,J) INITIALE

•100E 01	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00
•250E 00	•250E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00
•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00
•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00
•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00
•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00
•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00
•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00
•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00
•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00	•000E 00

II-RESULTATS

A PARTIR DE EPSILON= •100E-05 ,L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION •
(PRECISION SUR LES A(I,J)= •000E 00)

MATRICE H

•100000E 01 •000000E 00 •000000E 00 •000000E 00

MATRICE G

•100000E 0
•000000E 00
•250000E 00
•250000E 00

MATRICE F_1

•000000E 00	•000000E 00	•100000E 01	•000000E 00
•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00	•100000E 01
•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00
•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00

MATRICE F_2

•000000E 00	•100000E 01	•000000E 00	•000000E 00
•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00
•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00	•100000E 01
•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES : suite initiale.

A PARTIR DE EPSILON= •631E-01 ,L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION •
(PRECISION SUR LES A(I,J)= •000E 00)

MATRICE H

•100000E 01 •000000E 00 •000000E 00

MATRICE G

•100000E 01
•000000E 00
•250000E 00

MATRICE F_1

•000000E 00	•000000E 00	•100000E 01
•250000E 00	•-250000E 00	•000000E 00
•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00

MATRICE F_2

•000000E 00	•100000E 01	•000000E 00
•000000E 00	•000000E 00	•000000E 00
•250000E 00	•-250000E 00	•000000E 00

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES : [illegible]

A PARTIR DE EPSILON= .251E 00 L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION =
(PRECISION SUR LES A(I,J)= .250E 00)

MATRICE H

.100CCE 01

MATRICE G

.100CCE 01

MATRICE F1

.250CCE 00

MATRICE F2

.CCCCCE 00

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

.100E 01	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.250E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.625E-01	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.156E-01	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.391E-02	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.977E-03	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.244E-03	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.610E-04	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.153E-04	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.381E-05	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00
.954E-06	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00	.000E 00

EXEMPLE NO 2

I=CONNEES

MATRICE H

.6CCCCE 00 .6CCCCE 00 .6CCCCE 00 .6CCCCE 00 .6CCCCE 00

MATRICE G

.1[illegible]CCE 00
.6CCCCE 00
.6CCCCE 00
.6CCCCE 00
.6CCCCE 00

MATRICE F1

.100CCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00
.CCCCCE 00	.2CCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00
.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.3CCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00
.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.4CCCCE 00	.CCCCCE 00
.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.5CCCCE 00

MATRICE F2

.5CCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00
.CCCCCE 00	.6CCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00
.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.7CCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00
.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.8CCCCE 00	.CCCCCE 00
.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.CCCCCE 00	.9CCCCE 00

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

.1[illegible]E 01	.126E 01	.918E 00	.693E 00	.539E 00	.430E 00	.350E 00	.290E 00	.244E 00	.207E 00	.177E 00
.8[illegible]E 00	.414E 00	.306E 00	.262E 00	.215E 00	.178E 00	.150E 00	.127E 00	.109E 00	.942E-01	.817E-01
.[illegible]8E 00	.1[illegible]E 00	.138E 00	.110E 00	.925E-01	.787E-01	.675E-01	.582E-01	.505E-01	.441E-01	.386E-01
.[illegible]0E-01	.676E-01	.571E-01	.486E-01	.417E-01	.360E-01	.312E-01	.272E-01	.238E-01	.209E-01	.185E-01
.[illegible]6E-01	.[illegible]0E-01	.2[illegible]E-01	.223E-01	.193E-01	.168E-01	.147E-01	.130E-01	.114E-01	.101E-01	.892E-02
.[illegible]0E-01	.138E-01	.119E-01	.104E-01	.912E-02	.801E-02	.705E-02	.623E-02	.551E-02	.489E-02	.434E-02
.739E-02	.6[illegible]E-02	.544E-02	.495E-02	.434E-02	.385E-02	.341E-02	.302E-02	.268E-02	.239E-02	.213E-02
.[illegible]E-02	.[illegible]E-02	.270E-02	.238E-02	.211E-02	.187E-02	.166E-02	.148E-02	.131E-02	.117E-02	.105E-02
.[illegible]E-02	.147E-02	.130E-02	.115E-02	.103E-02	.912E-03	.812E-03	.724E-03	.6[illegible]E-03	.577E-03	.516E-03
.[illegible]E-03	.713E-03	.633E-03	.563E-03	.502E-03	.447E-03	.399E-03	.357E-03	.319E-03	.285E-03	.255E-03
.[illegible]E-03	.348E-03	.310E-03	.276E-03	.247E-03	.220E-03	.197E-03	.176E-03	.158E-03	.141E-03	.127E-03

II-RESULTATS

DIMENSION EXCESSIVE OU PIVOT TROP PETIT POUR EPSILON = .100E-05

PARTIR DE EPSILON= .126E-05 ,L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION :
(PRECISION SUR LES A(I,J)= .225E-04)

MATRICE H

.10000E 01 .00000E 00 .00000E 00 .00000E 00

MATRICE G

.18000E 01
.13600E 01
.91800E 00
.69300E 00

MATRICE F_1

-.40000E 00 .10000E 01 .29802E-07 -.52154E-07
.74506E-08 -.40000E 00 .10000E 01 -.22352E-07
.29802E-07 -.74506E-07 -.40000E 00 .10000E 01
-.23132E 00 .13663E 01 -.29767E 01 .24380E 01

MATRICE F_2

.00000E 00 .10000E 01 .00000E 00 .00000E 00
.00000E 00 .00000E 00 .10000E 01 .00000E 00
.00000E 00 .00000E 00 .00000E 00 .10000E 01
-.23132E 00 .13663E 01 -.29767E 01 .24380E 01

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

.18E 01	.12E 01	.91E 00	.69E 00	.53E 00	.43E 00	.35E 00	.29E 00	.24E 00	.20E 00	.17E 00
.54E 00	.41E 00	.33E 00	.26E 00	.21E 00	.17E 00	.15E 00	.12E 00	.10E 00	.94E-01	.81E-01
.19E 00	.16E 00	.13E 00	.11E 00	.92E-01	.78E-01	.67E-01	.58E-01	.50E-01	.44E-01	.38E-01
.81E-01	.67E-01	.57E-01	.48E-01	.41E-01	.35E-01	.31E-01	.27E-01	.23E-01	.21E-01	.18E-01
.35E-01	.30E-01	.25E-01	.22E-01	.19E-01	.16E-01	.14E-01	.13E-01	.11E-01	.10E-01	.89E-02
.15E-01	.13E-01	.11E-01	.10E-01	.91E-02	.80E-02	.70E-02	.62E-02	.55E-02	.49E-02	.43E-02
.73E-02	.64E-02	.56E-02	.49E-02	.43E-02	.38E-02	.34E-02	.30E-02	.26E-02	.23E-02	.21E-02
.34E-02	.30E-02	.27E-02	.23E-02	.21E-02	.18E-02	.16E-02	.14E-02	.13E-02	.11E-02	.10E-02
.17E-02	.14E-02	.13E-02	.11E-02	.10E-02	.91E-03	.81E-03	.72E-03	.64E-03	.57E-03	.51E-03
.80E-03	.71E-03	.64E-03	.56E-03	.50E-03	.44E-03	.40E-03	.35E-03	.31E-03	.28E-03	.25E-03
.39E-03	.34E-03	.31E-03	.27E-03	.24E-03	.22E-03	.19E-03	.17E-03	.15E-03	.14E-03	.12E-03

PARTIR DE EPSILON= .5C1E-04 ,L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION :
(PRECISION SUR LES A(I,J)= .391E-03)

MATRICE H

.10000E 01 .00000E 00 .00000E 00

MATRICE G

.18000E 01
.12600E 01
.91800E 00

MATRICE F_1

-.39978E 00 .99935E 00 .45618E-03
.18647E-03 -.40054E 00 .10004E 01
.34856E 00 -.15230E 01 .17604E 01

MATRICE F_2

.00000E 00 .10000E 01 .00000E 00
.00000E 00 .00000E 00 .10000E 01
.34840E 00 -.15219E 01 .21601E 01

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

.18E 01	.12E 01	.91E 00	.69E 00	.53E 00	.43E 00	.35E 00	.29E 00	.24E 00	.20E 00	.17E 00
.54E 00	.41E 00	.33E 00	.26E 00	.21E 00	.17E 00	.15E 00	.12E 00	.10E 00	.94E-01	.81E-01
.19E 00	.16E 00	.13E 00	.11E 00	.92E-01	.78E-01	.67E-01	.58E-01	.50E-01	.44E-01	.38E-01
.81E-01	.67E-01	.57E-01	.48E-01	.41E-01	.35E-01	.31E-01	.27E-01	.23E-01	.21E-01	.18E-01
.35E-01	.30E-01	.25E-01	.22E-01	.19E-01	.16E-01	.14E-01	.13E-01	.11E-01	.10E-01	.89E-02
.15E-01	.13E-01	.11E-01	.10E-01	.91E-02	.80E-02	.70E-02	.62E-02	.55E-02	.49E-02	.43E-02
.73E-02	.64E-02	.56E-02	.49E-02	.43E-02	.38E-02	.34E-02	.30E-02	.27E-02	.24E-02	.21E-02
.34E-02	.30E-02	.27E-02	.23E-02	.21E-02	.18E-02	.16E-02	.14E-02	.13E-02	.11E-02	.10E-02
.17E-02	.14E-02	.13E-02	.11E-02	.10E-02	.91E-03	.81E-03	.72E-03	.65E-03	.58E-03	.52E-03
.80E-03	.71E-03	.63E-03	.56E-03	.50E-03	.45E-03	.40E-03	.35E-03	.32E-03	.28E-03	.25E-03
.39E-03	.35E-03	.31E-03	.27E-03	.24E-03	.22E-03	.19E-03	.17E-03	.15E-03	.14E-03	.12E-03

A PARTIR DE EPSILON= .388E-02 L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION :
(PRECISION SUR LES A(I,J)= .289E-01)

MATRICE H

.10000E 01 .00000E 00

MATRICE G

.18000E 01
.12600E 01

MATRICE F1

-.40000E 00 .10000E 01
-.52817E 00 .10831E 01

MATRICE F2

.00000E 00 .10000E 01
-.52816E 00 .14831E 01

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

.180E 01	.126E 01	.918E 00	.696E 00	.547E 00	.444E 00	.370E 00	.314E 00	.270E 00	.235E 00	.205E 00
.540E 00	.414E 00	.329E 00	.269E 00	.225E 00	.192E 00	.166E 00	.144E 00	.127E 00	.112E 00	.986E-01
.198E 00	.163E 00	.137E 00	.118E 00	.102E 00	.890E-01	.782E-01	.689E-01	.609E-01	.540E-01	.478E-01
.846E-01	.798E-01	.627E-01	.548E-01	.482E-01	.426E-01	.377E-01	.334E-01	.296E-01	.263E-01	.233E-01
.386E-01	.339E-01	.298E-01	.263E-01	.233E-01	.206E-01	.183E-01	.162E-01	.144E-01	.128E-01	.114E-01
.124E-01	.162E-01	.144E-01	.128E-01	.113E-01	.100E-01	.893E-02	.793E-02	.705E-02	.626E-02	.557E-02
.889E-02	.799E-02	.700E-02	.622E-02	.552E-02	.491E-02	.436E-02	.388E-02	.344E-02	.306E-02	.272E-02
.433E-02	.385E-02	.342E-02	.304E-02	.270E-02	.240E-02	.213E-02	.189E-02	.168E-02	.150E-02	.133E-02
.211E-02	.188E-02	.167E-02	.148E-02	.132E-02	.117E-02	.104E-02	.926E-03	.823E-03	.732E-03	.651E-03
.103E-02	.918E-03	.816E-03	.725E-03	.645E-03	.573E-03	.509E-03	.453E-03	.403E-03	.358E-03	.318E-03
.505E-03	.449E-03	.399E-03	.355E-03	.315E-03	.280E-03	.249E-03	.221E-03	.197E-03	.175E-03	.156E-03

A PARTIR DE EPSILON= .631E-01 L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION :
(PRECISION SUR LES A(I,J)= .166E 00)

MATRICE H

.10000E 01

MATRICE G

.18000E 01

MATRICE F1

.30000E 00

MATRICE F2

.70000E 00

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

.180E 01	.126E 01	.882E 00	.617E 00	.432E 00	.303E 00	.212E 00	.148E 00	.104E 00	.726E-01	.508E-01
.540E 00	.378E 00	.265E 00	.185E 00	.130E 00	.908E-01	.635E-01	.445E-01	.311E-01	.218E-01	.153E-01
.162E 00	.113E 00	.794E-01	.556E-01	.389E-01	.272E-01	.191E-01	.133E-01	.934E-02	.654E-02	.458E-02
.486E-01	.340E-01	.238E-01	.167E-01	.117E-01	.817E-02	.572E-02	.400E-02	.280E-02	.196E-02	.137E-02
.146E-01	.102E-01	.714E-02	.500E-02	.350E-02	.245E-02	.172E-02	.120E-02	.841E-03	.588E-03	.412E-03
.437E-02	.306E-02	.214E-02	.150E-02	.105E-02	.735E-03	.515E-03	.360E-03	.252E-03	.177E-03	.124E-03
.131E-02	.918E-03	.643E-03	.450E-03	.315E-03	.221E-03	.154E-03	.108E-03	.756E-04	.530E-04	.371E-04
.394E-03	.275E-03	.193E-03	.135E-03	.945E-04	.662E-04	.463E-04	.324E-04	.227E-04	.159E-04	.111E-04
.118E-03	.826E-04	.579E-04	.405E-04	.284E-04	.198E-04	.139E-04	.973E-05	.681E-05	.477E-05	.334E-05
.354E-04	.248E-04	.174E-04	.122E-04	.851E-05	.595E-05	.417E-05	.292E-05	.204E-05	.143E-05	.100E-05
.106E-04	.743E-05	.520E-05	.364E-05	.255E-05	.178E-05	.125E-05	.875E-06	.613E-06	.429E-06	.301E-06

EXEMPLE NO 3

I-DONNEES

MATRICE H

•60CCCE CC •60CCCE CC •6CCCCE CC •6CCCCE CC •6CCCCE CC

MATRICE G

•6CCCCE CC
•6CCCCE CC
•6CCCCE CC
•6CCCCE CC
•6CCCCE CC

MATRICE F_1

•51CCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC
•CCCCCE CC •52CCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC
•CCCCCE CC •CCCCCE CC •53CCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC
•CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •54CCCE CC •CCCCCE CC
•CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •55CCCE CC

MATRICE F_2

•55CCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC
•CCCCCE CC •56CCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC
•CCCCCE CC •CCCCCE CC •57CCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC
•CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •58CCCE CC •CCCCCE CC
•CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •CCCCCE CC •59CCCE CC

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

•18CE 01 •1C3E C1 •585E CC •334E CC •191E CC •1C9E CC •623E-01 •356E-01 •2C4E-C1 •117E-01 •67CE-02
•954E CC •544E CC •311E CC •177E CC •1C1E CC •579E-01 •332E-01 •190E-01 •1C9E-01 •623E-C2 •357E-02
•5C6E CC •289E CC •165E CC •942E-01 •539E-01 •3C8E-01 •177E-01 •101E-01 •58CE-02 •332E-02 •191E-02
•269E CC •153E CC •877E-C1 •5C1E-01 •287E-01 •164E-01 •941E-02 •539E-02 •3C9E-02 •177E-02 •1C2E-02
•143E CC •815E-01 •466E-C1 •267E-01 •153E-01 •875E-02 •5C2E-02 •288E-02 •165E-02 •948E-C3 •545E-03
•758E-01 •434E-C1 •248E-C1 •142E-C1 •814E-02 •467E-02 •268E-02 •154E-02 •882E-C3 •5C7E-03 •291E-03
•4C3E-01 •231E-01 •132E-C1 •757E-02 •434E-02 •249E-02 •143E-02 •82CE-03 •471E-C3 •271E-03 •156E-03
•215E-01 •123E-C1 •7C4E-C2 •4C4E-02 •232E-02 •133E-02 •763E-03 •439E-C3 •252E-03 •145E-03 •835E-04
•114E-01 •655E-C2 •376E-C2 •215E-02 •124E-02 •71CE-03 •4C8E-03 •235E-03 •135E-03 •777E-04 •447E-04
•6C9E-02 •349E-C2 •2CCE-C2 •115E-02 •661E-03 •38CE-03 •218E-03 •126E-03 •723E-04 •416E-04 •24CE-04
•325E-02 •186E-C2 •1C7E-C2 •615E-C3 •353E-03 •2C3E-03 •117E-03 •673E-04 •387E-04 •223E-04 •129E-04

II-RESULTATS

A PARTIR DE EPSILON= •1CCE-C5 L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION =
(PRECISION SUR LES A(I,J)= •128E-C5)

MATRICE H

•1CCCCE C1 •CCCCCE CC

MATRICE G

•18CCCE C1
•1C26CE C1

MATRICE F_1

-•4CCCCE-01 •1CCCCE C1
-•32535E CC •11C11E C1

MATRICE F_2

•CCCCCE CC •1CCCCE C1
-•325S5E CC •11411E C1

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

•18CE 01 •1C3E C1 •585E CC •334E CC •191E CC •1C9E CC •623E-01 •356E-01 •2C4E-01 •117E-01 •67CE-02
•954E CC •544E CC •311E CC •177E CC •1C1E CC •579E-01 •332E-01 •190E-01 •1C9E-01 •623E-02 •357E-02
•5C6E CC •289E CC •165E CC •943E-01 •539E-01 •3C8E-01 •177E-01 •101E-01 •58CE-02 •332E-02 •191E-02
•269E CC •153E CC •877E-C1 •5C1E-01 •287E-01 •164E-01 •941E-02 •539E-02 •3C9E-02 •177E-02 •1C2E-02
•143E CC •815E-01 •466E-C1 •267E-01 •153E-01 •875E-02 •5C2E-02 •288E-02 •165E-02 •948E-03 •545E-03
•75BE-01 •434E-01 •248E-01 •142E-01 •814E-02 •467E-02 •268E-02 •154E-02 •882E-03 •5C7E-03 •291E-03
•4C3E-01 •231E-01 •132E-01 •757E-02 •434E-02 •249E-02 •143E-02 •821E-03 •472E-03 •271E-03 •156E-03
•215E-01 •123E-01 •7C4E-02 •4C4E-02 •232E-02 •133E-02 •763E-03 •439E-03 •252E-03 •145E-03 •835E-04
•114E-01 •655E-02 •376E-02 •215E-02 •124E-02 •71CE-03 •4C8E-03 •235E-03 •135E-03 •777E-04 •44BE-04
•6C9E-02 •349E-02 •2CCE-02 •115E-02 •661E-03 •38CE-03 •218E-03 •126E-03 •723E-04 •416E-04 •24CE-04
•325E-02 •186E-02 •1C7E-02 •615E-03 •353E-03 •2C3E-03 •117E-03 •673E-04 •388E-04 •223E-04 •129E-04

A PARTIR DE EPSILON= .521E-03 ,L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION :
(PRECISION SUR LES A(I,J)= .7C3E-C3)

MATRICE H

.10000E 01

MATRICE G

.18000E 01

MATRICE F_1

.53000E 00

MATRICE F_2

.57000E 00

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

.18CE 01	.103E 01	.598E 00	.333E 00	.19CE 00	.108E 00	.617E-01	.352E-01	.201E-01	.114E-01	.652E-02
.954E 00	.544E 00	.310E 00	.177E 00	.101E 00	.574E-01	.327E-01	.186E-01	.106E-01	.606E-02	.345E-02
.506E 00	.288E 00	.164E 00	.936E-01	.534E-01	.304E-01	.173E-01	.988E-02	.563E-02	.321E-02	.183E-02
.268E 00	.153E 00	.871E-01	.496E-01	.283E-01	.161E-01	.919E-02	.524E-02	.299E-02	.17CE-02	.97CE-03
.142E 00	.81CE-01	.461E-01	.263E-01	.150E-01	.855E-02	.487E-02	.278E-02	.158E-02	.9C2E-03	.514E-03
.753E-01	.429E-01	.245E-01	.139E-01	.795E-02	.453E-02	.258E-02	.147E-02	.839E-03	.478E-03	.273E-03
.399E-01	.227E-01	.13CE-01	.739E-02	.421E-02	.240E-02	.137E-02	.780E-03	.445E-03	.253E-03	.144E-03
.211E-01	.121E-01	.687E-02	.392E-02	.223E-02	.127E-02	.725E-03	.413E-03	.236E-03	.134E-03	.766E-04
.112E-01	.639E-02	.364E-02	.208E-02	.118E-02	.674E-03	.384E-03	.219E-03	.125E-03	.712E-04	.406E-04
.594E-02	.338E-02	.193E-02	.11CE-02	.627E-03	.357E-03	.204E-03	.116E-03	.662E-04	.377E-04	.215E-04
.315E-02	.179E-02	.1C2E-02	.583E-03	.332E-03	.189E-03	.108E-03	.615E-04	.351E-04	.20CE-04	.114E-04

EXEMPLE NO 4

I-DONNEES

MATRICE H

.60000E 00 .60000E 00 .60000E 00 .60000E 00 .60000E 00

MATRICE G

.60000E 00
.60000E 00
.60000E 00
.60000E 00
.60000E 00

MATRICE F_1

.55100E 00 .00000E 00 .00000E 00 .00000E 00 .00000E 00
.00000E 00 .55200E 00 .00000E 00 .00000E 00 .00000E 00
.00000E 00 .00000E 00 .55300E 00 .00000E 00 .00000E 00
.00000E 00 .00000E 00 .00000E 00 .55400E 00 .00000E 00
.00000E 00 .00000E 00 .00000E 00 .00000E 00 .55500E 00

MATRICE F_2

.55500E 00 .00000E 00 .00000E 00 .00000E 00 .00000E 00
.00000E 00 .55600E 00 .00000E 00 .00000E 00 .00000E 00
.00000E 00 .00000E 00 .55700E 00 .00000E 00 .00000E 00
.00000E 00 .00000E 00 .00000E 00 .55800E 00 .00000E 00
.00000E 00 .00000E 00 .00000E 00 .00000E 00 .55900E 00

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

.18CE 01	.100E 01	.558E 00	.311E 00	.173E 00	.965E-01	.538E-01	.299E-01	.167E-01	.929E-02	.518E-02
.998E 00	.554E 00	.309E 00	.172E 00	.958E-01	.534E-01	.297E-01	.166E-01	.922E-02	.514E-02	.286E-02
.556E 00	.309E 00	.171E 00	.951E-01	.530E-01	.295E-01	.164E-01	.916E-02	.510E-02	.284E-02	.158E-02
.304E 00	.17CE 00	.944E-01	.526E-01	.293E-01	.163E-01	.909E-02	.506E-02	.282E-02	.157E-02	.875E-03
.168E 00	.936E-01	.522E-01	.291E-01	.162E-01	.903E-02	.503E-02	.280E-02	.156E-02	.869E-03	.484E-03
.935E-01	.521E-01	.249E-01	.161E-01	.896E-02	.499E-02	.278E-02	.155E-02	.863E-03	.481E-03	.268E-03
.519E-01	.289E-01	.140E-01	.890E-02	.496E-02	.276E-02	.154E-02	.857E-03	.477E-03	.266E-03	.148E-03
.288E-01	.160E-01	.794E-02	.492E-02	.274E-02	.153E-02	.851E-03	.474E-03	.264E-03	.147E-03	.819E-04
.157E-01	.877E-02	.439E-02	.272E-02	.152E-02	.844E-03	.470E-03	.262E-03	.146E-03	.813E-04	.453E-04
.871E-02	.485E-02	.272E-02	.151E-02	.838E-03	.467E-03	.260E-03	.145E-03	.807E-04	.450E-04	.251E-04
.482E-02	.268E-02	.149E-02	.832E-03	.464E-03	.258E-03	.144E-03	.801E-04	.446E-04	.249E-04	.139E-04

II-RESULTATS

A PARTIR DE EPSILON= .100E-05 ,L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION :
.(PRECISION SUR LES A(I,J)= .589E-07)

MATRICE H

.100000E 01 .000000E 00

MATRICE G

.180000E 01
.100286E 01

MATRICE F_1

-.399999E-02 .100000E 01
-.310285E 00 .111000E 01

MATRICE F_2

.000000E 00 .100000E 01
-.310285E 00 .111400E 01

SUITE A(I,.) GENEREE PAR CES MATRICES

.182E 01	.100E 01	.558E 00	.311E 00	.173E 00	.965E-01	.538E-01	.299E-01	.167E-01	.929E-02	.518E-02
.995E 00	.554E 00	.309E 00	.172E 00	.958E-01	.534E-01	.297E-01	.166E-01	.922E-02	.514E-02	.286E-02
.550E 00	.307E 00	.171E 00	.951E-01	.530E-01	.295E-01	.164E-01	.916E-02	.510E-02	.284E-02	.158E-02
.304E 00	.170E 00	.944E-01	.526E-01	.293E-01	.163E-01	.909E-02	.506E-02	.282E-02	.157E-02	.875E-03
.168E 00	.938E-01	.522E-01	.291E-01	.162E-01	.903E-02	.503E-02	.280E-02	.156E-02	.869E-03	.484E-03
.931E-01	.519E-01	.289E-01	.161E-01	.896E-02	.499E-02	.278E-02	.155E-02	.863E-03	.481E-03	.268E-03
.516E-01	.287E-01	.160E-01	.890E-02	.496E-02	.276E-02	.154E-02	.857E-03	.477E-03	.266E-03	.148E-03
.286E-01	.159E-01	.883E-02	.492E-02	.274E-02	.153E-02	.851E-03	.474E-03	.264E-03	.147E-03	.819E-04
.157E-01	.877E-02	.488E-02	.272E-02	.152E-02	.844E-03	.470E-03	.262E-03	.146E-03	.813E-04	.453E-04
.871E-02	.485E-02	.270E-02	.151E-02	.838E-03	.467E-03	.260E-03	.145E-03	.807E-04	.450E-04	.251E-04
.482E-02	.268E-02	.149E-02	.832E-03	.464E-03	.258E-03	.144E-03	.801E-04	.446E-04	.249E-04	.139E-04

A PARTIR DE EPSILON= .5C1E-05 ,L'ALGORITHME DONNE POUR REPRESENTATION =
(PRECISION SUR LES A(I,J)= .666E-05)

MATRICE H

.100000E 01

MATRICE G

.180000E 01

MATRICE F_1

.553000E 00

MATRICE F_2

.557000E 00

SUITE A(I,J) GENEREE PAR CES MATRICES

.182E 01	.100E 01	.558E 00	.311E 00	.173E 00	.965E-01	.538E-01	.299E-01	.167E-01	.929E-02	.517E-02
.995E 00	.554E 00	.309E 00	.172E 00	.958E-01	.534E-01	.297E-01	.166E-01	.922E-02	.514E-02	.286E-02
.550E 00	.307E 00	.171E 00	.951E-01	.530E-01	.295E-01	.164E-01	.916E-02	.510E-02	.284E-02	.158E-02
.304E 00	.170E 00	.944E-01	.526E-01	.293E-01	.163E-01	.909E-02	.506E-02	.282E-02	.157E-02	.875E-03
.168E 00	.938E-01	.522E-01	.291E-01	.162E-01	.903E-02	.503E-02	.280E-02	.156E-02	.869E-03	.484E-03
.931E-01	.519E-01	.289E-01	.161E-01	.896E-02	.499E-02	.278E-02	.155E-02	.862E-03	.480E-03	.268E-03
.516E-01	.287E-01	.160E-01	.890E-02	.496E-02	.276E-02	.154E-02	.856E-03	.477E-03	.266E-03	.148E-03
.286E-01	.159E-01	.883E-02	.492E-02	.274E-02	.153E-02	.850E-03	.474E-03	.264E-03	.147E-03	.818E-04
.157E-01	.877E-02	.488E-02	.272E-02	.152E-02	.844E-03	.470E-03	.262E-03	.146E-03	.812E-04	.453E-04
.871E-02	.485E-02	.270E-02	.150E-02	.838E-03	.467E-03	.260E-03	.145E-03	.807E-04	.445E-04	.250E-04
.481E-02	.268E-02	.149E-02	.830E-03	.463E-03	.258E-03	.144E-03	.801E-04	.446E-04	.248E-04	.138E-04

Bibliographie

Ackermann J.E.

[A1] Canonical minimal realizations of a matrix of impulse reponse sequences. Inf. and control 19, p.224/231 (1971).

d'Alessandro P, Isidori A, Ruberti A.

[A2] Equivalence transformations in linear dynamical systems. Int. J. systems, Vol. 2,N° 2 (1971).

[A3] A new approach to the theory of canonical decomposition of linear dynamical systems. Siam J.C., Vol. 11, N° 1 (1973).

Anderson B.D.O. et coauteurs (Kailath T, Loo S.G., Moore J.B., Silvermann L., Vongpanitlerd S.)

[A4] A system criterion for positive real matrices. Siam J.C. Vol. 5 N° 2 (Mai 1967).

[A5] An algebraic solution to the spectral factorization problem. IEEE A.C. 12,N° 4. (Août 1967).

[A6] Uniform complete controllability of time varying systems. (coauteur Silverman). IEEE A.C. 12,N° 6.(Décembre 1968).

[A7] Optimal state estimation in high noise (coauteur Moore). Inf. and control n° 13, p. 286/294.(1968).

[A8] Algebraic structure of generalised positive real matrices. (coauteur Moore). Siam J.C. Vol. 6, p. 615/624 (1968).

[A9] Convergence properties of Riccati equation solutions. (coauteur Moore). IEEE A.C. 13 (Décembre 1968).

[A10] New results in linear systems stability. (coauteur Moore). Siam J.C. Vol. 7, N° 3 (Août 1969).

[A11] Spectral factorization of time varying covariance functions (coauteurs Moore et Loo). IEEE I.T. 15 (Septembre 1969).

[A12] Impedances matrices and their state space descriptions. IEEE C.T. (1970).

[A13] The Kalman-Bucy filter as a true time varying Wiener filter : (coauteur Moore). IEEE S.M.C. N° 2 (Avril 1971).

[A14] The choice of signal process models in Kalman-Bucy filtering (coauteur Kailath). Math. Analysis and Applications 35, p.659/668

[A15] Linear optimal control (coauteur Moore) Prentice Hall (1971).

[A16] External and internal stability of linear systems ; a new connection. IEEE A.C. 17 (Février 1972).

[A17] Network analysis and synthesis. A modern systems approach. (coauteur Vongpanitlerd). Prentice Hall (1972).

[A18] Algebraic properties of minimal degree spectral factors. Automatica. vol. 9 pp. 491/500 (1973).

Attasi S.

[A19] Systèmes linéaires homogènes à deux indices. Rapport Laboria (Laboria, Rocquencourt, 78-FRANCE).

Balakrishnan A.V.

[B1] On the problem of deducing state and state relations from input-output relations for linear time varying systems. SIAM J.C. Vol. 5, N° 3 (1967).

Brockett R.W.

[B2] Finite dimensional linear systems. Wiley (1970).

Bucy R.

[B3] Global theory of the Riccati equation Journal of computer and system sciences 1, p. 349/361 (1967).

[B4] Filtering for stochastic processes with applications to guidance. Interscience publishers (1968).

Budin M.

[B5] Minimal realizations of linear systems from input-output observations. - discrete systems : IEEE A.C. 16 (Octobre 1971).
- continuous " : IEEE A.C. 17 (Avril 1972).

Desoer C.A., Varaiya P.

[D1] The minimal realization of a non anticipative impulse response matrix. SIAM J.A.M. Vol. 15, n° 3 (Mai 1967).

Dubenko T.I.

[D2] The Kalman filter for random fields. Autom. and remote control, p. 1945/1948 (1973).

Faurre P. et coauteurs (Chataigner P., Marmorat J.P.

[F1] Representation for stochastic processes. Ph.D. Dissertation, Stanford University, U.S.A. (Février 1967).

[F2] Note sur les points conjugués en commande optimale. C.R. Acad. Sc. Paris T.266 (Juin 1968).

[F3] Représentation gaussienne markovienne des processus aléatoires, lemme sur le caractère positif réel. CETHEDEC, N° 16 (1968).

[F4] Note sur la solution d'un problème d'optimisation singulier. C.R. Acad. Sc. Paris, T.268 (Mars 1969).

[F5] Un algorithme de réalisation stochastique (coauteur Marmorat). C.R.Acad. Sc. Paris T. 268 (Avril 1969).

[F6] Identification par minimisation d'une représentation markovienne de processus aléatoires. Symp. on optimization. Nice (Juin 1969)

[F7] Introduction à la commande optimale et aux jeux différentiels. Centre d'Automatique de l'E.N.S.M., Paris (Juin 1969).

[F8] Positivité des systèmes dynamiques linéaires et applications. Cahier de l'IRIA N° 3, IRIA 78-Rocquencourt, France. (Nov. 1970).

[F9] Identification en temps réel et en temps différé par factorisation de matrices de Hankel (coauteur Chataigner). Colloque Franco-suédois sur la conduite des procédés. IRIA 78-Rocquencourt, France - (Octobre 1971).

[F10] Réalisations markoviennes de processus stationnaires. Thèse de doctorat d'état, Paris VI (Décembre 1972)

Friedland H.
[F11] On solutions of the Riccati equation in optimization problems. IEEE A.C. 12 (Juin 1967).

Germain F.
[G1] Algorithmes continus de calcul de réalisations markoviennes. Cas singulier, stabilité. Thèse de Docteur-Ingénieur, à paraître.

Gelfand I.T. et Vilenkin N.Y.
[G2] Generalized functions - Applications to harmonic analysis. Vol. 4 chap. 3

Ho B.L. et Kalman R.E.
[H1] Effective construction of linear state variable models from input-output functions. Regelungstechnik 14, p. 545-548 (1966).

I.E.E.E. Transactions on automatic control (collectif).
[I1] Special issue on linear quadratic gaussian problem (Décembre 1971).

Jacobson D.H.
[J1] Totally singular quadratic minimization problems. IEEE A.C. 16 (Décembre 1971).

Kailath T. et coauteurs (Aasnaes H., Frost P., Geesey R. Gevers).
[K1] An innovations approach to least square estimations. (coauteurs Aasnaes, Frost, Geesey, Gevers) En 5 parties parues respectivement dans IEEE A.C. 13 p. 646/655 et 655/660 , A.C. 16 p. 217/225 et 720/725 et A.C. 18, p. 435/453.
[K2] The innovations approach to detection and estimation theory. Proc. IEEE. Vol. 58, N° 5 (Mai 1970).
[K3] Some extensions of the innovations theorem. Bell system technical journal Vol. 50, N° 4 (Avril 1971).
[K4] A note on least square estimation by the innovations method. SIAM J.C. Vol. 10, N° 3 (Août 1972).

Kalman R.E.
[K5] Linear stochastic filtering theory-reappraisal and outlook. Symp. on Sys. theory. Polytechnic Inst. of Brooklyn (Avril 1965).
[K6] Lectures on controllability and observability. Séminaire CIME, Bologne, Italie (Juillet 1970).
[K7] On partial realizations of a linear input-output map. Guillemin anniversary Volume - Holt, Rinehart, Winston (1970).

Kalman R.E., Falb P.L. Arbib M.A.
[K8] Topics in mathematical system theory. Mac Graw Hill (1969).

Le Hung Son R.E., Anderson B.D.O.
[L1] Design of Kalman filters using signal model input statistics.

Milo S., Pilicastro M.
[M1] About a Property of a class of linear time varying systems. IEEE A.C. 15 (Avril 1973).

Moore J.B. et coauteurs (Anderson B.D.O., Colebatch M.S., Loo S.G.).
[M2] Generation of prescribed non stationary covariances (coauteurs Anderson et Loo). Hawaï conference on systems science (1968).
[M3] Extensions of quadratic minimization theory.(coauteur Anderson) - Irt. J. Control, Vol. 7, N° 5 (1968).
[M4] Spectral factorization of time varying covariance functions. The singular case. (coauteur Anderson). Math. Sys. Th. (1969).
[M5] Extensions of quadratic minimization theory. The discrete time case (coauteur Colebatch) Proc. IEE, Vol. 117, N° 1 (Janv. 1970).

Mehra R.
[M6] Approaches to adaptative filtering
IEEE A.C. (Octobre 1972).

Newcomb R.W.
[N1] Linear multiport synthesis. Mac Graw Hill (1966).

Popov V.
[P1] Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions. Revue Roumaine des Sciences et Techniques. 9, 4, p. 629/690 (1964).
[P2] L'hyperstabilité des systèmes automatiques. Dunod (1973).

Ralston A., Wilf H.
[R1] Mathematical methods for digital computers. Wiley (1968).

Rice J.R.
[R2] The approximation of functions. Addison Wesley (1964).

Rissanen J. et coauteurs (Barbosa L, Kailath T.)
[R3] Properties of infinite covariance matrices and stability of optimum predictors (coauteur Barbosa). Inf. Sciences Vol 1, N° 3 (1969).
[R4] Recursive identification of linear systems. Siam J.C. Vol. 9, N° 3 (Août 1971).

[R5] Partial realizations of random systems (coauteur Kailath). Automatica Vol. 8 p. 389/396 (1972).

[R6] Realizations of matrix sequences. Seminaires IRIA, IRIA 78-Rocquencourt, FRANCE (1972).

Silverman L. et coauteurs (Anderson, Meadows, Payne)

[S1] Representation and realizations of time variable linear systems. Tech. report n° 94 ; Columbia University, U.S.A. (Juin 1966).

[S2] Controllability and observability in time variable linear systems. (coauteur Meadows) Siam J.C. Vol. 5, N° 1 (1967).

[S3] Controllability observabilities and stability of linear systems (coauteur Anderson) Siam J.C. Vol. 6, N° 1 (1968).

[S4] Property and applications of inverse systems. IEEE A.C. 13 (Août 1968).

[S5] Synthesis of impulse response matrix by internally stable and passive realizations. IEEE C.T. 15, N° 3 (Septembre 1968).

[S6] Equivalent realizations of linear systems (coauteur Meadows) Siam J.A.M. Vol. 17, N° 2 (Mars 1969).

[S7] Input output structure of linear systems with application to the decoupling problem (coauteur Payne). Siam J.C. Vol. 9, N° 2

[S8] Realization of linear dynamical systems. IEEE A.C. 14 (Décembre 1971).

Tether A.

[T1] Construction of minimal state variable models from input output data. IEEE A.C. 15 (Août 1970).

Weiss L.

[W1] On the structure theory of linear differential systems. Siam. J. C., Vol. 6, N° 4 (1968).

Willems J.C. et coauteurs (Mitter S.)

[W2] The generation of Lyapunov functions for input output stable systems. Siam J.C. Vol. 9, N° 1 (Février 1971).

[W3] Controllability-observability, pole allocation and state reconstruction (coauteur Mitter S.K.) IEEE A.C. 16, N° 6 (Décembre 1971)

[W4] Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. IEEE A.C. 16, N° 6 (Décembre 1971).

[W5] Dissipative dynamical systems. Archive for rational mechanics and analysis (1972).

Wiberg D.

[W6] State space and linear systems. Shaum's outline series. Mac Graw Hill (1971).

Youla D.C.

[Y1] On the factorization of rational matrices. IRE. I.T. 7, p. 172/189 (1961).

[Y2] The synthesis of linear dynamical systems from prescribed weigthing patterns. Siam J.A.M. Vol. 19, N° 3 (Mai 1966).

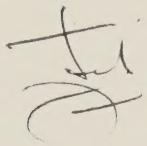
Yacoubovitch V.A.

[Y3] Absolute stability of non linear control systems in critical cases. Avt. i Telem. 24,3 et 6 (1963).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données

Vu et approuvé :

Orsay, le 7 décembre 19 73

Le Vice-Président du Centre d'Orsay :